оценки испарения с озёр и водохранилищ // Учёные записки. – СПб.: РГГМУ, 2014. – С. 22–29.

12. *Эдельштейн К.К.* Гидрология озёр и водохранилищ. – М.: Перо, 2014. – 400 с.

13. *Богословский Б.Б.* О водообмене и водных массах водных объектов // Круговороты вещества и энергии в озёрных водоемах. – Новосибирск: Наука, 1975. – С. 270–275.

*Поступила в редакцию 14.07.2015*

УДК 622.4:551.4

# Возможности решения некоторых инженерных задач горного дела в криолитозоне с помощью граничного метода

Ф.М. Федоров[*], А.И. Матвеев[**]

[*]*Северо-Восточный федеральный университет, г. Якутск*
[**]*Институт горного дела Севера СО РАН, г. Якутск*

*На примере трех типичных задач математической физики и их вариаций, часто возникающих при освоении месторождений в зоне Арктики, показана возможность успешного применения граничного метода решения прикладных задач математической физики. Первый тип задач посвящен прикладному решению нелинейной тепловой задачи с целью определения теплофизических характеристик мерзлых, талых и протаивающих-промерзающих горных пород. Второй тип относится к задаче абляции–плавления твердых материалов применительно к мерзлым труднопромывистым глинистым горным породам для их наиболее полного диспергирования с целью эффективного извлечения тонких классов полезного компонента. Третий тип задач относится к задаче течения ламинарного пограничного слоя вдоль поверхности магнитной поверхности с целью извлечения тонких классов немагнитных компонентов полезных ископаемых: золото, платина, олово и т.д. Предложены простые решения всех этих задач.*

Ключевые слова: труднопромывистые мерзлые и талые породы, незамерзшая вода, задача абляции–плавления, магнитный шлюз.

*On the example of three typical tasks of mathematical physics and their variations that often arise during the development of oil fields in the Arctic area, the possibility of successful application of frontier methods of solving applied problems of mathematical physics. The first type of tasks is dedicated to application of solutions of the nonlinear thermal problem to determine the thermal characteristics of frozen, thawed and thawing - freezing rocks. The second type of the tasks is related with the problems of ablation - the melting of solids applied to frozen hard disintegrating clay rocks for their most complete dispersion in order to effectively recover fine fractions of the useful component. The third type of problems refers to the tasks of the laminar boundary layer flow along the magnetic surface for extraction of thin non-magnetic component classes of minerals: gold, platinum, tin, and others. Simple solutions of all these problems are proposed.*

Key words: hard disintegrating frozen and thawed rocks, unfrozen water, task of ablation, melting, magnetic lock.

## Введение

В монографии [1] автором предложен новый аналитический метод решения дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями, названный граничным методом. Название метода обусловлено прежде всего тем, что искомое решение удовлетворяет (естественно, в предельном смысле) исходному дифференциальному уравнению в граничных точках. При этом решение ищется в виде степенного ряда по пространственной координате для нестационарных задач.

Естественно такой подход требует, на первый взгляд, существенно ограничивающее для применения условие аналитичности, хотя бы по

[*]ФЕДОРОВ Фома Михайлович – д.ф.-м.н., г.н.с., foma-46@mail.ru; [**]МАТВЕЕВ Андрей Иннокентьевич – д.т.н., зав. лаб., andrei.mati@yandex.ru.

пространственной координате искомого решения. Однако еще О.Коши первым обратил внимание на замечательное свойство некоторых дифференциальных уравнений в частных производных, состоящее в том, что все их решения аналитичны, этот факт он доказал для эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами. Пикар методом последовательных приближений показал, что указанным свойством обладают некоторые дифференциальные уравнения, коэффициенты которых аналитичны по $x$ и $t$. Для эллиптических уравнений более общего вида с аналитическими коэффициентами наличие данного свойства доказал С. Н. Бернштейн [2]. Он же указал, что таким же свойством обладают и параболические уравнения, решение которых аналитичны по пространственной координате. В современных исследованиях такого типа изучаются даже вырождающиеся уравнения, например, эллиптические [3]. Кроме того, доказательство некоторой гладкости решения дифференциальных уравнений стало почти необходимым атрибутом.

Итак, пусть решение некоторого дифференциального уравнения в частных производных с соответствующими краевыми и начальными условиями ищется в виде степенного ряда по пространственной координате $x$:

$$u(x,t)=\sum_{i-0}^{\infty} a_i(t)x^i, \qquad (1)$$

где $a_i(t)$ – искомые коэффициенты.

Ясно, что для определения всех коэффициентов $a_i(t)$ необходимо наличие бесконечного числа условий, а в действительности имеем только два краевых условия (в случае одномерных по пространственной координате задач).

В соответствии с граничным методом, дифференцируя бесконечное число раз краевые условия по $t$ и используя основное уравнение, заменяем производные по $t$ в краевых условиях производными по пространственной координате (в предельном смысле) в граничных точках. Таким образом, получим бесконечное число недостающих дополнительных условий. Подставляя степенной ряд (1) в исходные краевые условия, а также во вновь полученные дополнительные условия, получим бесконечную систему алгебраических уравнений: для линейных задач – линейную бесконечную систему, а для нелинейных – нелинейную. Поскольку бесконечное число раз дифференцируем по $x$ степенной ряд (1), то эти бесконечные системы часто имеют более простой, во-первых, так называемый гауссовый вид [4], т. е. все элементы матрицы системы $a_{i,j}$ при $i>j$ равны нулю ($a_{i,j}=0$). Во-вторых, коэффициенты $a_{i,j}$ системы имеют особую структуру:

$$\frac{a_{j,j+p}}{a_{j+p,j+p}}=a_p \qquad \forall j,$$

и бесконечные системы с такими коэффициентами названы периодическими системами [5]. Исследования таких систем изложены автором, в частности, в работах [4,6]. Таким образом, найдя решение бесконечных систем, находим точное решение исходной краевой задачи.

Вместе с тем аппарат граничного метода является достаточно эффективным способом получения приближенных с необходимой точностью простых по форме решений краевых задач практически любой сложности, лишь бы искомое решение имело достаточную гладкость. Необходимая точность приближенного решения (функции) достигается тем, что не только сама искомая функция (приближенное решение) в двух крайних точках рассматриваемой области принимает точное значение, но и соответствующие производные вплоть до бесконечного порядка (если ищем точное решение) принимают точные значения в этих крайних точках.

Рассмотрим некоторые типы модельных задач, которые с успехом могут найти свое применение при освоении северных территорий. Приводим приближенное решение этих задач, полученных граничным методом.

### Нелинейные задачи теплопроводности и диффузии

Пусть задано следующее нелинейное уравнение теплопроводности (диффузии):

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) \quad 0<x<\infty, t>0, \qquad (2)$$

с начальными условиями

$$T(\infty,t)=T(x,0)=0 \qquad (3)$$

и с одним из трех краевых условий

$$T(0,t)=T_n, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=q, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=\alpha(T(0,t)-T_c). \qquad (6)$$

Причем $\lambda(T)$ – произвольная заданная функция по $T$ такая, что $(\lambda(T))_{x=0}\neq 0$.

Приближенное решение задачи (2)–(4) для краевого условия (4), полученное граничным методом, приведено в [1], причем для $T_n$=1 имеем

$$T=\left(1-\frac{x}{R}\right)^2\cdot\left[\frac{1}{\overline{\lambda}_0}\left(2+\overline{\lambda}_0-\sqrt{4+6\overline{\lambda}_0}\right)\frac{x}{R}+1\right], \qquad (7)$$

$$R=2\sqrt{\frac{2\lambda_0\left(\sqrt{4+6\overline{\lambda}_0}-1\right)t}{1+2\overline{\lambda}_0}}, \qquad (8)$$

где $R=R(T)$ – радиус теплого влияния,

$$\overline{\lambda}_0=\frac{\lambda_0'}{\lambda_0}; \qquad \lambda_0=\lambda(T_n); \qquad \lambda_0'=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial T}\right)_{x=0}.$$

В работе [1] также приведено сравнение решения (7)–(8) с точными решениями при

$$\lambda=\frac{\chi_0}{1-\alpha T}; \qquad \lambda=\frac{\chi_0}{(1-\alpha T)^2}; \qquad \lambda=(1+\alpha T)\,\chi_0, \quad (9)$$

которое показывает достаточную точность формул (7)–(8) для широкого диапазона изменения исходных параметров.

Видно, что уравнение (2) с учетом (9) является существенно нелинейным уравнением. При освоении северных территорий, особенно при строительстве различных зданий, автодорог и т. д. на зоне распространения вечной мерзлоты, значительную роль играет прогноз морозного пучения сезонно-промерзающих грунтов. Исследование этой проблемы приводит к решению существенно нелинейных уравнений тепло- и массопереноса, поскольку основной характеристикой этого процесса является количество незамерзшей влаги $W(T)$, имеющее по экспериментальным данным, например, вид [5]:

$$W(T)=\begin{cases} a+b\left(\dfrac{1}{1-c(T+d)}-1\right), & T\le -d,\\ a_1+b_1T, & -d\le T\le 0,\end{cases}$$

где $a=a_1-bd$. При этом $W(T)$ связано со льдосодержанием $W_1(T)$ в мерзлой зоне и с количеством влаги $W_0(T)$ в талой зоне уравнением

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial W_1}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_2(W_0,T)\frac{\partial W}{\partial T}\right), \qquad (10)$$

где $W$ – количество незамерзшей влаги; $W_1$ – льдосодержание; $W_0$ – количество влаги в талой зоне; $k_2(W_0,T)$ – коэффициент диффузии в мерзлой зоне.

Следовательно, уравнение (10), которое решается совместно с обычным уравнением теплопроводности, является существенно нелинейным и может быть успешно решено по аналогии с задачей (2) – (4) граничным методом.

Исследование широкого круга проблем освоения Севера основано на изучении процессов тепло- и массопереноса в промерзающих–протаивающих средах, математическое моделирование которых включает уравнения типа (10).

**Расчет динамики протаивания с дезинтеграцией высокоглинистых мерзлых пород**

Пусть решается однофазная задача с подвижной границей $\xi(t)$:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\chi\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0<x<\xi(t),\ t>0, \qquad (11)$$

$$T(\xi t)=\varphi_1(t), \qquad (12)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\xi}=\varphi_2(t), \qquad (13)$$

$$T(x,0)=\varphi_0(x), \qquad (14)$$

а на границе $x$=0 задано одно из условий (4)–(6).

Общее решение задачи (11)–(13), полученное граничным методом для произвольных функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, приведено в работе [1], которое для частного случая, когда $\varphi_1(t)=T_Ф$ = const имеет вид:

$$T(x,t)=T_ф-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\chi^n(2n+1)!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\cdot\left[\varphi_2(t)(\xi-x)^{2n+1}\right], \qquad (15)$$

где $\xi(t)$ – неизвестный параметр. Для определения $\xi(t)$ используется одно из условий (4)–(6). В соответствии с граничным методом, если, например, задано условие (4), то дополнительными условиями являются выражения:

$$\left(\frac{\partial^{2i}T}{\partial x^{2i}}\right)_{x=0}=0, \qquad i=1,2,3,... \quad (16)$$

Пусть

$$\varphi_2(t)=-\frac{G_ф}{\lambda}\,\xi',$$

тогда при $n$=1, подставляя (15) в (4) и (16), получим систему двух уравнений относительно $\xi'$ и $\xi''$. Решив данную систему, найдем

$$\xi=\sqrt{3\chi\left(\sqrt{1+\frac{4\lambda T_n}{3\chi G_ф}}-1\right)t}. \qquad (17)$$

Сравнение решения (17) с точным решением приведено в [1], которое показывает достаточную точность.

Математическая модель типа (11) – (14) может быть использована при исследовании искусственного оттаивания как одного из важнейших этапов технологического цикла при разработке россыпных месторождений полезного ископаемого, расположенного в области многолетнемерзлых пород, в частности, при разработке труднопромывистых глинистых песков в режиме абляции, т. е. в режиме непрерывного обнажения фронта оттаивания мерзлых пород. В данном случае

$$\varphi_1(t)=0, \qquad \varphi_2(t)=\frac{G_\phi \xi'}{\lambda}-\frac{q}{\lambda},$$

$$T(R)=-T_M, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=R}=0,$$

где $q$ – тепловой поток на обнаженной поверхности породы; $R=R(t)$ – радиус теплового влияния; $\xi=\xi(t)$ – глубина протаивания; $T_M$ – начальная температура мерзлой породы (абсолютная).

Для этой задачи упрощенным вариантом граничного метода получено следующее выражение:

$$\xi(t)=\frac{qt}{\rho c T_M+G_\phi}, \tag{18}$$

где $\rho$ – плотность мерзлой породы; $c$ – удельная теплоемкость мерзлой породы.

Тепловой поток $q$ в мерзлые горные породы определяется из соотношения теплового баланса на поверхности обнажения подобно работе [7].

При таком способе искусственного оттаивания мерзлых глинистых пород наилучшим образом решаются две основные задачи: во-первых, достигается максимальная скорость оттаивания, что следует из формулы (18), кроме того, за счет непрерывного обнажения мерзлой породы максимально аккумулируется тепло солнечной радиации; во-вторых, если непрерывное обнажение мерзлой поверхности осуществляется дождеванием, то происходит наилучшая дезинтеграция мерзлых глинистых пород из-за водной эррозии.

## Обогащение тонких классов тяжелых полезных ископаемых

Пусть заданы стационарные уравнения Прандтля для плоского пограничного слоя с учетом влияния магнитной вязкости [7]:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\frac{(\mu_n+\mu_M)}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{20}$$

со стандартными граничными условиями

$$u(x,0)=v(x,0)=0, \tag{21}$$

$$u(x,\infty)=U(x), \tag{22}$$

где $\mu_n$, $\mu_M$ – коэффициенты, соответственно, молекулярной и магнитной вязкости суспензии.

Численное решение задачи (19)–(22) традиционными методами конечных разностей встречает определенные трудности, вместе с тем, данная задача решается граничным методом довольно просто и достаточно точно. В соответствии с граничным методом решения $u(x,y)$ и $v(x,y)$ ищутся в виде степенных рядов:

$$u(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^i, \tag{23}$$

$$v(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^i, \tag{24}$$

где $\delta=\delta(x)$.

Если в рядах (23), (24) ограничиться восемью членами, то получим:

$$a_0=a_{3=0},\ a_1=\frac{60\mu\left(7U-2a_2\delta^2\right)}{\left(240\mu-b_2\delta^3\right)},\ a_2=-\frac{UU'}{2\mu};$$

$$a_4=\left(35U-20a_1\delta-10a_2\delta^2\right),$$

$$a_5=\left(-84U+45a_1\delta+20a_2\delta^2\right),$$

$$a_6=\left(70U-36a_1\delta-15a_2\delta^2\right),$$

$$a_7=\left(-20U+10a_1\delta+4a_2\delta^2\right);$$

$$b_0=b_1=b_4=0,\ b_2=-\frac{3b_3}{5}-U'\delta,$$

$$b_3=\frac{\delta^3}{6\mu}\left(U'^2+UU''\right);$$

$$b_5=-\frac{6b_3}{5}+U'\delta, \qquad b_6=b_3-U'\delta,$$

$$b_7=-\frac{9b_3}{35}+\frac{2U'\delta}{7}, \tag{25}$$

где $\mu=\frac{\mu_n+\mu_M}{\rho}$.

Если предположить, что $U(x)=\text{const}$, то профиль скорости $u(x,y)$ будет иметь вид:

$$u(x,y)=\frac{7Uy}{4\delta(x)}-\frac{21Uy^5}{4\delta^5(x)}+\frac{7Uy^6}{\delta^6(x)}-\frac{5Uy^7}{2\delta^7(x)}. \tag{26}$$

Тогда из интеграла теплого баланса определяем:

$$\delta(x) = \sqrt{32{,}2\nu\frac{x}{U}}. \qquad (27)$$

Зная величину $\delta(x)$, можно вычислить: а) толщину вытеснения $\delta_1(x)=0{,}313\delta(x)$; б) толщину потери импульса $\delta_2(x)=0{,}116\delta(x)$; в) толщину потери энергии $\delta_3(x)=0{,}179\delta(x)$.

Известен способ обогащения тонких классов тяжелых полезных ископаемых (золота, платины, олова и т. д.) на магнитных шлюзах, т. е. на магнитных осадительных поверхностях. В начальной стадии работы магнитного шлюза формируется длинноцепочная структура из сфлокулированных ферромагнитных частиц, через этот слой фильтруется пульпа, оставляя в нем концентрат тяжелых немагнитных металлов (золота, платины, олова и т. д.). На второй стадии работы шлюза, т. е. после насыщения сгенерированного слоя ферромагнитными частицами, над этим слоем медленно начинает течь вместо с пульпой ламинарный пограничный слой сфлокулированных частиц в силу уменьшения напряженности магнитного поля, унося с собой концентрат тяжелых минералов (в том числе немагнитных). Следовательно, этот процесс можно описать уравнениями (19)–(20) с граничными условиями (21), приближенное решение которых имеет вид (25). Сравнение точности решений (26)–(27) для частного случая $U(x)$=const показывает достаточно хорошую точность [7].

## Выводы

Таким образом показано, что три типа совершенно разных задач и их вариации, труднореализуемые обычными численными методами, могут быть решены довольно просто и достаточно точно граничным методом.

Известно, что для большинства типичных дисперсных материалов (песок, суглинок, глина) в зоне криолитозоны количество незамерзшей воды зависит от температуры. Для определения теплофизических характеристик этих материалов необходимо решить прямую и обратную нелинейную тепловую задачу (2)–(6), прямое приближенное решение которой найдено (7)–(8) с достаточной точностью.

С целью максимальной скорости оттаивания мерзлых глинистых пород и их максимальной эффективности диспергирования могут быть предложены различные способы искусственного оттаивания мерзлых пород с непрерывным снятием талого слоя. В этом случае исследуемое явление сводится к решению задачи абляции–плавления твердого вещества с полным удалением жидкой фазы. Приведены простые расчетные формулы данного процесса.

Одним из наиболее перспективных направлений по наиболее полному извлечению тонких классов ценных компонентов из труднопромывистых глинистых пород является использование технологических возможностей методов полиградиентной сепарации на магнитных осадительных поверхностях. В этом случае может образоваться ламинарный пограничный слой сфлокулированных частиц, который медленно течет вдоль осадительной поверхности и уносит с собой концентрат тяжелых минералов (в том числе немагнитных: золото, платина, олово и т. д.). Приведены простые расчетные формулы расчета параметров этого пограничного слоя.

*Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания (проект №3047).*

## Литература

1. *Федоров Ф.М.* Граничный метод решения прикладных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 2000.

2. *Бернштейн С.Н.* Собрание сочинений. Т. 1. – М.: Изд-во АН СССР, 1952.

3. *Янушаускас А.* Аналитическая теория эллиптических уравнений. – Новосибирск: Наука, 1979.

4. *Федоров Ф.М.* Периодические бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. – Новосибирск: Наука, 2009.

5. *Степанов А.В.* Тепломассообменные свойства техногенных грунтов криолитозоны. – Новосибирск: Наука, 2011.

6. *Федоров Ф.М.* Граничный метод решения прикладных задач математической физики и его приложения в геомеханике: Автореф. дис. … д.ф.-м.н. – Новосибирск, 2002.

7. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974.

*Поступила в редакцию 24.06.2015*