МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ И ХИМИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 539.3; 539.5; 620.22
https://doi.org/10.31242/2618-9712-2023-28-2-337-345

Оригинальная статья

Об одном специальном случае трансверсально-изотропного упругого материала, применимого для многолетнемерзлых пород

Ю. М. Григорьев[1,2,✉], А. М. Яковлев[3]

[1]*Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, г. Якутск, Российская Федерация*
[2]*Академия наук Республики Саха (Якутия), Якутск, Российская Федерация*
[3]*ООО «Майтона», г. Якутск, Российская Федерация*

✉*grigyum@yandex.ru*

Аннотация
Многие природные и искусственные материалы обладают трансверсальной изотропией упругих свойств. Трансверсально-изотропные материалы возникают и используются во многих технологиях и отраслях, например, в механике горных пород в условиях многолетней мерзлоты. Для математического описания таких материалов используется модель трансверсально-изотропного матерала с пятью упругими независимы константами. Уравнения этой модели сложнее, чем для изотропной упругости, и их анализ вызывает гораздо больше трудностей. Одним из методов такого анализа является факторизация, т. е. сведение к решению более простых уравнений первого порядка. В данной работе представлены основы нового метода кватернионной факторизации уравнений равновесия трансверсально-изотропной теории упругости в одном специальном случае.
Ключевые слова: трансверсально-изотропный материал, теория упругости, факторизация, кватернионная функция
Финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта № 20-31-90065 Российского научного фонда.
Для цитирования: Григорьев Ю.М., Яковлев А.М. Об одном специальном случае трансверсально-изотропного упругого материала, применимого для многолетнемерзлых пород. *Природные ресурсы Арктики и Субарктики*. 2023;28(2):337–345. https://doi.org/10.31242/2618-9712-2023-28-2-337-345

Original article

Transversally isotropic elastic material applicable for permafrost rocks: a case study

Yu. M. Grigor'ev[1,2,✉], A. M. Yakovlev[3]

[1]*Ammosov North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russian Federation*
[2]*Academy of Sciences of the Republic of Sakha (Yakutia), Yakutsk, Russian Federation*
[3]*LLC Mytona, Yakutsk, Russian Federation*

✉*grigyum@yandex.ru*

Abstract
In this paper we present the principles for a new method of quaternion factorization of the equilibrium equations for the transversally isotropic elasticity. Natural and artificial materials have anisotropy of physical properties. Many of them have transversal isotropy of elastic properties. Transversally isotropic materials are used in many technologies and industries, for example, in rock mechanics under permafrost conditions. Mathematical description of such materials involves the model of a transversally-isotropic material with 5 independent elastic constants. The equations of this model are more complicated than those for isotropic elasticity, and their analysis causes much more difficulties.

One of the methods for analyzing such equations is factorization, i.e. reduction to the solution of simpler first-order equations.

Keywords: transversally-isotropic material, elasticity theory, factorization, quaternion function
Funding. This study was supported by the Russian Science Foundation (grant number 20-31-90065).
For citation: Grigor'ev Yu.M., Yakovlev A.M. Transversally isotropic elastic material applicable for permafrost rocks: a case study. *Arctic and Subarctic Natural Resources*. 2023;28(2):337–345. (In Russ.); https://doi.org/10.31242/2618-9712-2023-28-2-337-345

Введение

Многие природные и искусственные материалы обладают анизотропными механическими свойствами. Полностью анизотропный упругий материал имеет 21 материальную константу, но при наличии симметрий их количество уменьшается [1]. Трансверсально-изотропный (ТИ) материал – материал с физическими свойствами, симметричными относительно оси, перпендикулярной плоскости изотропии [1, 2.] Эта поперечная плоскость имеет бесконечные плоскости симметрии, внутри этой плоскости свойства материала одинаковы во всех направлениях. Такие материалы известны еще как «полярно-анизотропные» материалы. В геофизике вертикально-поперечная изотропия также известна как радиальная анизотропия. В инженерной практике, в геофизике, для природных и искусственных материалов с микроструктурой и во многих других случаях используется ТИ-модель упругости. Она имеет пять констант упругости.

Эта модель используется во многих технологиях и отраслях, например, в механике горных пород. Трансверсальная изотропия характерна для большинства осадочных пород (алевролиты, филлиты, сланцы, песчаники, известняки, граниты, гранодиориты и др.) [3, 4]. Показано, что ТИ-модель морозного пучения промерзания мелкозернистых грунтов точнее изотропной модели и вместе с аналитическими выражениями пяти упругих постоянных предоставляет хороший инструмент для анализа промерзающих грунтов [5] Экспериментально показано, что в тоннелях холодного региона морозное пучение окружающих пород в процессе промерзания трансверсально-изотропно. Цилиндрическая поверхность, образованная окружным и осевым направлениями, является поверхностью поперечной изотропии, а линия, проходящая вдоль радиального направления, – осью поперечной изотропии. Эти результаты используются для оптимизации конструкции теплоизоляционного слоя туннеля холодного региона [6, 7].

Однонаправленно армированный материал, в котором армировочные волокна беспорядочно распределены в поперечном сечении цилиндра из изотропного материала или все волокна идентичны и расположены в правильном шестиугольном ряду, представляет собой ТИ-композит [8]. Волокно кевлара, из которого делают бронежилеты, при малых деформациях также представляет собой упругий ТИ-композиционный материал [9]. Детали из однонаправленных ТИ-композитов (трубы, стержни, профили, оболочки и др.), используются в конструкциях современных летательных аппаратов [10].

Многие другие материалы: композиты, керамики, углеволокна, эпоксидный графит, эпоксидное стекло, древесина, некоторые полупроводниковые материалы, также описываются ТИ-моделью. В самой современной технологии 3D-печати также используется ТИ-модель материала [11], как и в биомедицине [12].

Для анализа задач плоской анизотропной упругости эффективно используется метод комплексных функций [1]. Вообще, это – эффективный инструмент, используемый в решении двухмерных задач математической физики. С помощью известных формул Колосова–Мусхелишвили построена полная теория упругости на плоскости.

Но для трехмерной анизотропной теории упругости аналогичные способы использования методов теории функций до сих пор не получили широкого распространения. В настоящее время для задач размерности больше двух развиваются некоторые варианты теории гиперкомплексных функций как аналогов комплексных функций. Наиболее популярны из них кватернионный и клиффордов анализы [13] Для пространственной изотропной упругости разработаны некоторые варианты трехмерного аналога формул Колосова–Мусхелишвили [14–18]. В этом случае общее решение уравнения Ламе для пространственной теория упругости выражается через две регулярные кватернионные или моногенные функции Клиффорда. Показаны некоторые эффективные применения метода кватернионных функций [14, 16–18] и некоторые возможности решения некорректной задачи Коши для уравнения Ламе [14]. Для трехмерных задач трансверсально-изотропной упругости вопрос применения гиперкомплексных функций остается открытым. Известно, что для некоторых частных случаев для ТИ-тел можно провести матричную диагонализацию трехмерной системы уравнений, например, для так называемого состояния Гассмана, см. [20]. Условие Гассмана [21] является одной из связей между упругими константами ТИ-тела и используется в геофизике, это условие приблизительно выполняется для некоторых геоматериалов [22].

Батугин и Ниренбург [23] показали, что в геомеханике для 45 ТИ горных пород приближенно выполняется некоторое другое условие между пятью упругими константами. В этой статье предлагается кватернионная факторизация уравнений изотропной и ТИ-упругости при выполнении некоторой новой связи между пятью упругими константами.

Основные уравнения трансверсально-изотропной теории упругости

Пусть x_1, x_2, x_3 или x, y, z – декартовы координаты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с единичными векторами $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$; $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_1 u_1 + \mathbf{e}_1 u_1 + \mathbf{e}_1 u_1$ – вектор упругого смещения, $u_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$, – его компоненты; $\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$, σ_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, – компоненты тензоров деформации и напряжения соответственно, здесь и далее индекс с запятой или переменной обозначает соответствующую частную производную. Уравнения равновесия имеют вид

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij,j} = 0,\ i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Закон Гука в общем анизотропном случае имеет следующий вид:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = 0,$$

где C_{ijkl} – тензор упругих постоянных среды, имеющий 21 независимую компоненту. При наличии симметрий число независимых упругих постоянных уменьшается до двух для изотропного случая.

Для трансверсально-изотропного тела закон Гука в матричных обозначениях имеет вид [24] (в наших обозначениях для упругих постоянных мы используем одинарный индекс)

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{32}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0\\ c_2 & c_1 & c_3 & 0 & 0 & 0\\ c_3 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_1 - c_2)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ 2\varepsilon_{23}\\ 2\varepsilon_{32}\\ 2\varepsilon_{12}\end{bmatrix}, \tag{2}$$

здесь ось x_3 перпендикулярна плоскости трансверсальной изотропии. В компонентах напряжений закон Гука примет вид

$$\begin{aligned} &\sigma_{11} = c_1\varepsilon_{11} + c_2\varepsilon_{22} + c_3\varepsilon_{33},\\ &\sigma_{22} = c_2\varepsilon_{11} + c_1\varepsilon_{22} + c_3\varepsilon_{33},\\ &\sigma_{11} = c_3\varepsilon_{11} + c_3\varepsilon_{22} + c_4\varepsilon_{33},\\ &\sigma_{12} = \frac{1}{2}(c_1 - c_2)\varepsilon_{12}, .\\ &\sigma_{23} = c_5\varepsilon_{23},\\ &\sigma_{31} = c_5\varepsilon_{31}. \end{aligned} \tag{3}$$

Для пяти упругих постоянных выполняются следующие неравенства, вытекающие из положительности упругой энергии [24]:

$$c_1 > |c_2|,\ (c_1 + c_2)c_4 > 2c_3^2,\ c_4 > 0.$$

При $c_2 = c_3 = \lambda$, $c_5 = \mu$, $c_1 = c_4 = \lambda + 2\mu$ имеем изотропный случай.

Если подставить выражения для напряжений из закона Гука (3) в уравнения равновесия (1), то получим уравнения равновесия в компонентах перемещения в следующем виде [2, с. 39]:

$$\begin{gathered} c_1u_{1,11} + \frac{c_1 - c_2}{2}u_{1,22} + c_5u_{1,33} +\\ + \frac{c_1 + c_2}{2}u_{2,12} + (c_3 + c_5)u_{3,13} = 0,\\ \frac{c_1 + c_2}{2}u_{1,12} + \frac{c_1 - c_2}{2}u_{2,11} + c_1u_{2,22} +\\ + c_5u_{2,33} + (c_3 + c_5)u_{3,23} = 0, \qquad (4)\\ (c_3 + c_5)(u_{1,13} + u_{2,23}) + c_5(u_{3,11} + u_{3,22}) + c_4u_{3,33} = 0. \end{gathered}$$

Имеются разные варианты введения пяти упругих постоянных в ТИ-упругости. В работе [22] вводятся величины $\lambda, \lambda', \mu, \mu', G'$ в качестве независимых упругих параметров ТИ-модели. Закон Гука в этих обозначениях принимает вид

$$\begin{gathered} \sigma_{11} = (\lambda = 2\mu)\varepsilon_{11} = \lambda\varepsilon_{22} = \lambda'\varepsilon_{33},\\ \sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11} = \lambda\varepsilon_{22} = \lambda'\varepsilon_{33},\\ \sigma_{33} = \lambda'(\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}) = (\lambda' = 2\mu')\varepsilon_{33},\\ \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}, \sigma_{23} = 2G'\varepsilon_{23}, \sigma_{31} = 2G'\varepsilon_{31}. \end{gathered} \tag{5}$$

В изотропном случае будет $\lambda' = \lambda$, $\mu' = G' = \mu = G$. Связь параметров из вышеприведенных обозначений легко найти, сравнивая (3) и (5):

$$c_1 = \lambda + 2\mu,\ c_2 = \lambda,\ c_3 = \lambda',\ c_4 = \lambda' + 2\mu',\ c_5 = G'. \quad (6)$$

Широкое распространение получило использование технических постоянных: E, E' – модули Юнга в направлении плоскости изотропии и перпендикулярно к ней, ν, ν' – соответствующие коэффициенты Пуассона, G' – модуль сдвига для плоскости, перпендикулярной плоскости изотропии [1, 2]. В этих обозначениях закон Гука наиболее просто записывается в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu'}{E'} & -\frac{\nu'}{E'} & \frac{1}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix},$$

или, в кратком матричном виде, $[\varepsilon] = S[\sigma]$, здесь через $[\varepsilon]$ и $[\sigma]$ обозначены соответствующие вектор-столбцы. Отсюда имеем

$$[\sigma] = S^{-1}[\varepsilon]. \quad (7)$$

Сравнивая матрицы (7) и (2), найдем связи постоянных c_i с техническими постоянными:

$$c_1 = \frac{E(-E' + E\nu'^2)}{(1+\nu)[E'(-1+\nu) + 2E\nu'^2]},$$

$$c_2 = \frac{E(E'\nu + E\nu'^2)}{(1+\nu)[E'(-1+\nu) + 2E\nu'^2]},$$

$$c_3 = \frac{EE'\nu'}{E'(1-\nu) - 2E\nu'^2},$$

$$c_4 = \frac{E'^2(-1+\nu)}{E'(-1+\nu) + 2E\nu'^2},$$

$$c_5 = G'.$$

Сравнивая обратную матрицу (2) с матрицей S, найдем выражения технических постоянных через постоянные c_i:

$$E = \frac{(c_1 - c_2)[-2c_3^2 + (c_1 + c_2)c_4]}{-c_3^2 + c_1 c_4},$$

$$\nu = \frac{(c_1 - c_2)[c_3^2 - c_2 c_4]}{c_3^2 - c_1 c_4},$$

$$E' = \frac{-2c_3^2 + (c_1 + c_2)c_4}{c_1 + c_2},$$

$$\nu' = \frac{c_3}{c_1 + c_2},$$

$$G' = c_5.$$

В изотропном случае остаются только две независимые упругие постоянные $E' = E$, $\nu' = \nu$. В этом случае модуль сдвига не является независимой переменной и выражается через технические постоянные:

$$G' = G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Заметим, что в изотропном случае используются также упругие постоянные Ламе λ и μ (здесь всюду используются они), последняя совпадает с коэффициентом сдвига: $\mu = G$. Они удобны тем, что закон Гука в этих обозначениях имеет очень краткую индексную запись:

$$\sigma_{ij} = \lambda\, \mathrm{div}\mathbf{u} + 2\mu\varepsilon_{ij}.$$

Их связь с техническими постоянными следующая:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Некоторые частные случаи трансверсально-изотропной упругости

Укажем некоторые частные случаи для трансверсально-изотропных тел, упомянутые во введении. Установлено, что в теории упругих волн в трансверсально-изотропных средах значительные математические упрощения получаются при выполнении определенных ограничений на упругие постоянные. Например Кэрриер [25], Кэмерон и Изон [26] нашли следующее алгебраическое соотношение между упругими постоянными:

$$(c_1 - c_5)(c_4 - c_5) - (c_3 + c_5)^2 = 0. \quad (8)$$

При выполнении соотношения (8) существенно упрощается задача анализа распространения волн в трансверсально-изотропных средах. С физической точки зрения существует мало экспериментальных данных, подтверждающих реальность такого твердого тела. Однако ценность данного соотношения заключается не в его приближении к какому-либо конкретному материалу, а в упрощении решения задачи о распространении волн в трансверсально-изотропных средах, но при сохранении некоторых качественных особенностей. Такое решение может также служить проверкой асимптотических и других приближенных результатов.

Условие Гассмана [21] в обозначениях (5) имеет вид

$$\frac{1}{G'} = \frac{\lambda + 2\mu + 3\lambda' + 2\mu'}{(\lambda + 2\mu)(\lambda' + 2\mu') - \lambda'^2}. \quad (9)$$

В наших обозначениях

$$c_1c_4 - c_3^2 = c_5(c_1 + 2c_3 + c_4). \quad (10)$$

Если выполняется (9), то поверхность преломления упругой волны представляет собой эллипсоид вращения. Показано, что некоторые геоматериалы приблизительно удовлетворяют этому условию [22]. При условии Гассмана система уравнений (4) приводится к диагональной матричной форме [20].

Батугин и Ниренбург [23] обнаружили приближенное состояние для 45 горных пород в геомеханике, при котором

$$G' = \frac{EE'}{E(1 + 2\nu') + E'} . \quad (11)$$

Здесь используются технические упругие постоянные для ТИ-тела. Это условие активно используется в геомеханике [3, 4], в наших обозначениях будем иметь довольно громоздкое выражение.

Как видно, в основном ограничения на упругие постоянные, упрощающие математический анализ, получены для волновых задач. В данной работе мы представим новую связь между упругими постоянными, получаемую из рассмотрения статической задачи.

Кватернионная факторизация уравнений теории упругости

Приведем начальные сведения о кватернионах и кватернионных функциях. Подробности можно найти в разных изданиях, например, в [13]. Пусть i, j, k — базисные единицы кватернионов, подчиняющиеся следующим правилам умножения:

$$i^2 = j^2 = k^2,\ ij = -ij = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j.$$

Элемент q-алгебры кватернионов $\mathbb{H}$ запишем в виде $q = q_0 + iq_x + jq_y + kq_z = q_0 + \mathbf{q}$, где q_0, q_x, q_y, q_z – действительные числа, q_0 называется скалярной частью кватерниона, $\mathbf{q} = iq_x + jq_y + kq_z$ называется векторной частью кватерниона q. Кватернионная функция, или, кратко, $\mathbb{H}$-значная функция f неполной кватернионной переменной $\boldsymbol{r} = ix + jy + kz \in \mathbb{R}^3$, является отображением $f{:}\Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$, или $f(\mathbf{r}) = f_0(\mathbf{r}) + \mathbf{f}(\mathbf{r}) = f_0(x, y, z) + + jf_y(x, y, z) + kf_z(x, y, z)$.

Функции f_0, f_x, f_y, f_z являются вещественными, определенными в Ω. Непрерывность, дифференцируемость или интегрируемость f определяются покоординатно. Для непрерывно дифференцируемых функций $f{:}\Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$, которые для простоты будем обозначать через $f \in C^1(\Omega, \mathbb{H})$, оператор $\nabla = i\partial_x + j\partial_y + k\partial_z$ называется оператором Дирака. Функция $f \in C^1(\Omega)$ называется регулярной в Ω, если $f \in \ker\nabla(\Omega)$: $\nabla f(\mathbf{r}) = 0$, $\mathbf{r} \in \Omega$. В векторных обозначениях условие регулярности записывается следующим образом:

$$\nabla f(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}) + \nabla f_0(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{r}) = 0.$$

Здесь и далее «·» и «×» обозначают соответственно скалярное и векторное умножения из векторного анализа, при наличии таких обозначений величины i, j и k рассматриваются как орты декартовой системы координат. Эта формула является кратким обозначением системы Моисила–Теодореску (СМТ), а СМТ является трехмерным аналогом системы Коши–Римана.

Кватернионная факторизация в изотропном случае

Вначале проведем кватернионную факторизацию уравнения упругого равновесия Ламе в изотропном случае:

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} = 0. \quad (12)$$

Перейдем к кватернионным обозначениям в этом уравнении Ламе. Во-первых, оператор Лапласа Δ выражается через кватернионный оператор Дирака ∇ в виде

$$\Delta = -\nabla\nabla.$$

Верхней черточкой будем обозначать кватернионное сопряжение: $\overline{q} = \overline{q_0 + \mathbf{q}} = q_0 - \mathbf{q}$. Далее, имеем соотношение

$$\nabla\mathbf{u} + \overline{\nabla\mathbf{u}} = -\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \times \mathbf{u} = -2\nabla \cdot \mathbf{u}.$$

С помощью этих двух соотношений запишем уравнение Ламе (12) в кватернионной форме

$$-(\lambda + \mu)\nabla\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \overline{\nabla\mathbf{u}}) - \mu\nabla\nabla\mathbf{u} = 0.$$

В этом уравнении оператор ∇ можно вынести налево за скобку:

$$\nabla\left[\frac{1}{2}(\lambda + \mu)(\nabla\mathbf{u} + \overline{\nabla\mathbf{u}}) + \mu\nabla\mathbf{u}\right] = 0.$$

Факторизация уравнения Ламе и заключается в получении этого уравнения. Отсюда следует, что выражение в квадратной скобке равняется некоторой регулярной кватернионной функции, обозначим ее w, $\nabla w = 0$, т. е. имеем следующее равенство:

$$w = \frac{1}{2}(\lambda + \mu)(\nabla\mathbf{u} + \overline{\nabla\mathbf{u}}) + \mu\nabla\text{м} =$$

$$= \frac{1}{2}(\lambda + 3\mu)\nabla\mathbf{u} + \frac{1}{2}(\lambda + \mu)\overline{\nabla\mathbf{u}}.$$

В векторных обозначениях это соотношение будет иметь следующий вид:

$$w = \frac{1}{2}(\lambda + 3\mu)(-\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{u}) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\lambda + \mu)(-\nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \times \mathbf{u}) = -(\lambda + 2\mu)\nabla \cdot \mathbf{u} + \mu\nabla \times \mathbf{u}.$$

Для регулярной функции w найдется ее первообразная, т. е. такая кватернионная функция W, что $\nabla W = w$, так что имеем следующее равенство:

$$\nabla W = \frac{1}{2}(\lambda + \mu)(\nabla \mathbf{u} + \overline{\nabla \mathbf{u}}) + \mu\nabla \mathbf{u} =$$

$$= \frac{1}{2}(\lambda + 3\mu)\nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2}(\lambda + \mu)\overline{\nabla \mathbf{u}}. \qquad (13)$$

Используя равенство (13), вычислим выражение:

$$\nabla W - \overline{\nabla W} = \frac{1}{2}(\lambda + \mu)(\nabla \mathbf{u} + \overline{\nabla \mathbf{u}}) + \mu\nabla \mathbf{u} -$$

$$- \frac{1}{2}(\lambda + \mu)(\overline{\nabla \mathbf{u}} + \nabla \mathbf{u}) - \mu\overline{\nabla \mathbf{u}} = \mu(\nabla \mathbf{u} - \overline{\nabla \mathbf{u}}).$$

Теперь найдем следующее выражение:

$$\nabla W - \overline{\nabla W} = \frac{1}{2}(\lambda + \mu)(\nabla \mathbf{u} + \overline{\nabla \mathbf{u}}) + \mu\nabla \mathbf{u} +$$

$$+ \frac{1}{2}(\lambda + \mu)(\overline{\nabla \mathbf{u}} + \nabla \mathbf{u}) + \mu\overline{\nabla \mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu)(\nabla \mathbf{u} - \overline{\nabla \mathbf{u}}).$$

Исключая $\overline{\nabla \mathbf{u}}$ из этих двух полученных равенств, находим

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\nabla W - \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\nabla W. \qquad (14)$$

Далее нам будет необходима следующая лемма М. Мишику [27].

Лемма (Мишику). Для любой регулярной функции f справедливо соотношение:

$$\overline{f} = -\frac{1}{2}[\nabla(f\mathbf{r}) + f]. \qquad (15)$$

Доказательство. Вычислим действие оператора ∇:

$$\nabla(f\mathbf{r}) = i\frac{\partial}{\partial x}(f\mathbf{r}) + j\frac{\partial}{\partial y}(f\mathbf{r}) + k\frac{\partial}{\partial z}(f\mathbf{r}) =$$

$$= i\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{r} + ifi + j\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{r} + jfj + k\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{r} + kfk =$$

$$= (\nabla f)\mathbf{r} + ifi + jfj + kfk = (if_0 - f_x + kf_y - jf_z)i +$$

$$+ (jf_0 - f_z - kf_x + jf_z)j + (kf_0 - f_z + jf_x - if_y)k =$$

$$= -\mathbf{f} - 3f_0 + 2\mathbf{f} = -3f_0 + \mathbf{f} = -f - 2\overline{f}.$$

Здесь использовано условие регулярности функции f: $\nabla f = 0$. Из полученного выражения и следует искомая формула. *Лемма доказана*.

Выражение ∇W в формуле (14) является регулярной функцией, поэтому, используя для нее лемму Мишику, будем иметь

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\nabla W +$$

$$+ \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\frac{1}{2}\{\nabla[(\nabla W)\mathbf{r}] + \nabla W =$$

$$= \nabla\left\{\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}W + \frac{\lambda + \mu}{4\mu(\lambda + 2\mu)}[(\nabla W)\mathbf{r} + W]\right\} =$$

$$= \nabla\left\{\frac{3\lambda + 7\mu}{4\mu(\lambda + 2\mu)}W + \frac{\lambda + \mu}{4\mu(\lambda + 2\mu)}(\nabla W)\mathbf{r}\right\}. \qquad (16)$$

Отсюда находим

$$\mathbf{u} = \frac{3\lambda + 7\mu}{4\mu(\lambda + 2\mu)}W + \frac{\lambda + \mu}{4\mu(\lambda + 2\mu)}(\nabla W)\mathbf{r} + \varphi =$$

$$= \frac{3\lambda + 7\mu}{4\mu(\lambda + 2\mu)}W + \frac{\lambda + \mu}{4\mu(\lambda + 2\mu)}w\mathbf{r} + \varphi, \qquad (17)$$

здесь φ – произвольная регулярная функция такая, что скалярная часть правой части формулы (17) равна нулю.

Введем другую регулярную функцию f, которая отличается только постоянным множителем от функции w:

$$f = \frac{\lambda + \mu}{4\mu(\lambda + 2\mu)}w. \qquad (18)$$

Введем также соответствующую первообразную F: $\nabla F = f$. Тогда окончательный результат сформулируется так: решение уравнения Ламе выражается через две регулярные кватернионные функции f, ψ и первообразную F функции f в виде

$$\mathbf{u} = \kappa F + f\mathbf{r} + \psi, \quad \kappa = \frac{3\lambda + 7\mu}{\lambda + \mu},$$

$$\nabla f = \nabla\psi = 0, \quad \nabla F = f, \qquad (19)$$

причем регулярная функция f выражается через перемещение в следующем виде:

$$f = \frac{\lambda + \mu}{4\mu(\lambda + 2\mu)}[-(\lambda + 2\mu)\nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \times \mathbf{u}], \qquad (20)$$

а первообразная F и регулярная функция ψ связаны соотношением

$$\kappa F_0 - \mathbf{f} \cdot \mathbf{r} + \psi_0. \qquad (21)$$

Формулу (19) называют трехмерным аналогом формул Колосова–Мусхелишвили. Впервые кватернионная факторизация уравнения Ламе проведена М. Мишику [27], но его конечный результат отличается от приведенного здесь. Трехмерный кватернионный аналог формул Колосова–Мусхелишвили впервые получен разными способами в [16, 28] и В.В. Наумовым [29]. В работе [30] проведена аналогичная факторизация уравнения Ламе с использованием клиффордовой алгебры, но там допущены ошибки, в частности, лемма Мишику сформулирована неверно и конечный аналог формулы Колосова–Мусхелишвили является неверным. Другой вариант трехмерного аналога формул Колосова–Мусхелишвили получен на основе общего решения Папковича–Нейбера [15].

Кватернионная факторизация для трансверсально-изотропной среды

Преобразуем уравнения равновесия следующим образом: введем следующие обозначения в ТИ-уравнение равновесия (4):

$$c^2 \equiv \frac{c_1 - c_2}{2c_5}; \quad a \equiv \frac{2(c_3 + c_5)}{c_1 + c_2};$$

$$\nabla^* = i\partial_1 + j\partial_2 + k\,\frac{1}{c}\,\partial_3; \tag{22}$$

$$\Delta^* \equiv -\nabla^*\nabla^* = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \frac{1}{c^2}\,\partial_3^2.$$

Тогда эти уравнения (4) можно переписать как следующие:

$$\frac{c_1 - c_2}{2}\,\Delta^* u_1 + \frac{c_1 - c_2}{2}(u_{1,1} + u_{2,2} + au_{3,3})_{,1} = 0,$$

$$\frac{c_1 - c_2}{2}\,\Delta^* u_2 + \frac{c_1 - c_2}{2}(u_{1,1} + u_{2,2} + au_{3,3})_{,2} = 0, \tag{23}$$

$$\frac{c_1 - c_2}{2}\,\Delta^* \frac{1}{ac^3} u_3 + \frac{c_1 - c_2}{2}[u_{1,1} + u_{2,2} +$$

$$+ \frac{2}{a(c_1 + c_2)}(c_4 - \frac{c_1 - c_2}{2c_4})u_{3,3}]_{,3} = 0.$$

Если ввести следующую связь между упругими постоянными ТИ-тела:

$$\frac{2}{a(c_1 + c_2)}\left(c_4 - \frac{c_1 - c_2}{2c^4}\right) = a, \tag{24}$$

то третье уравнение (23) будет аналогично первому и второму уравнениям (23), и мы получим условие кватернионной факторизации. Далее, умножим первое уравнение (23) на кватернионную единицу i, второе на j и третье на k и после суммирования этих выражений получим уравнение равновесия ТИ-тела в следующей кватернионной форме:

$$\frac{c_1 + c_2}{2}\nabla^*(u_{1,1} + u_{2,2} + au_{3,3}) +$$

$$+ \frac{c_1 - c_2}{2}\left(iu_1 + ju_2 + k\frac{1}{ac^3}u_3\right) = 0. \tag{25}$$

Это уравнение можно представить как действие левой части кватернионного квазидираковского оператора ∇^* на некоторую кватернионную функцию

$$\nabla^*\left[\frac{c_1 + c_2}{2}(u_{1,1} + u_{2,2} + au_{3,3}) -\right.$$

$$\left.- \frac{c_1 - c_2}{2}\,\nabla^*\left(iu_1 + ju_2 + k\,\frac{1}{ac^3}u_3\right)\right] = 0. \tag{26}$$

Таким образом, если ввести кватернионную функцию

$$f = \frac{c_1 + c_2}{2}(u_{1,1} + u_{2,2} + au_{3,3}) -$$

$$- \frac{c_1 - c_2}{2}\,\nabla^*\left(iu_1 + ju_2 + k\,\frac{1}{ac^3}u_3\right), \tag{27}$$

то эту функцию $f \in ker\nabla^*$ можно назвать квазирегулярной кватернионной функцией неполной кватернионной переменной $\mathbf{r} = ix + jy + kz$

$$\nabla^* f = 0. \tag{28}$$

После вычисления кватернионного действия оператора ∇^* в (27) находим связь между упругим перемещением $\mathbf{u}(x, y, z)$ ТИ-тела со скаляром и вектором части произвольной квазирегулярной кватернионной функции $f = f_0 + \mathbf{f}$:

$$f_0 = c_1(u_{1,1} + u_{2,2}) + \left(a\,\frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{c_1 + c_2}{2ac_3}\right)c_{3,3},$$

$$\mathbf{f} = \frac{c_1 + c_2}{2}\nabla \times \left(iu_1 + ju_2 + k\frac{1}{ac^3}u_3\right). \tag{29}$$

В частном случае изотропной упругости, когда [2] $c_1 = c_4 = \lambda + 2\mu$, $c_2 = c_3 = \lambda$, $c_5 = \mu$, отсюда имеем $c = a = 1$ и уравнение (22) преобразуется в обычную кватернионную факторизацию уравнения Ламе для изотропной упругости с оператором Дирака:

$$\nabla[(\lambda + 2\mu)\nabla \cdot \mathbf{u} - \mu\nabla \times \mathbf{u}] = 0.$$

В дальнейшем необходимо из соотношения (29) выразить вектор перемещения $\mathbf{u}$ через квазирегулярную функцию f и, тем самым, получить трехмерный кватернионный аналог формул Колосова–Мусхелишвили для трансверсально-изотропной среды. При этом необходимо развить теорию квазирегулярных кватернионных функций, удовлетворяющих условию (28).

Заключение

В данной работе мы представляем новую связь (20) между пятью упругими постоянными для ТИ-тела, которая позволила провести кватернионную факторизацию уравнений равновесия. С помощью этой факторизации можно найти аналог формул Колосова–Мусхелишвили для таких ТИ-тел. Представленная кватернионная факторизация открывает путь к решению трехмерных задач для ТИ-тел с использованием методов кватернионных функций.

Список литературы / References

1. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела*. Изд. 2-е. М.: Наука; 1977. 416 с.

Lekhnitsky S.G. *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Ed. 2nd. Moscow: Nauka; 1977. 416 p. (In Russ.)

2. Ding H., Chen W., Zhang L. *Elasticity of Transversely Isotropic Materials*. Springer; 2006.

3. Климов Д.М., Карев В.И., Коваленко Ю.Ф., Устинов К.Б. Механико-математическое и экспериментальное моделирование устойчивости скважин в анизотропных геосредах. *Изв. РАН. МТТ*. 2013;(4):4–12.

Klimov D.M., Karev V.I., Kovalenko Y.F. et al. Mechanical--mathematical and experimental modeling of well stability in anisotropic media. *Mech. Solids*. 2013;(4):4–12. (In Russ.)

4. Журавлев А.Б., Устинов К.Б. О величинах, характеризующих степень упругой анизотропии трансверсально-изотропных горных пород; роль сдвигового модуля. *Изв. РАН*. МТТ. 2019;(4):129–140. https://doi.org/10.1134/S0572329919040123.

Zhuravlev A.B., Ustinov K.B. On values characterizing the degree of elastic anisotropy of transversely isotropic rocks; role of shear modulus. *Mech. Solid*. 2019;(4):129–140. https://doi.org/10.1134/S0572329919040123. (In Russ.)

5. Liu Q., Wang Z., Li Z. et al. Transversely isotropic frost heave modeling with heat–moisture–deformation coupling. *Acta Geotech*. 2020;15:1273–1287. https://doi.org/10.1007/s11440-019-00774-1

6. Xia Caichu, Lv Zhitao, Li Qiang, Huang Jihui, Bai Xueying. Transversely isotropic frost heave of saturated rock under unidirectional freezing condition and induced frost heaving force in cold region tunnels. *Cold Regions Science and Technology*. 2018;152:48–58. https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2018.04.011.

7. Lyu Zhitao, Xia Caichu, Liu Weiping. Analytical solution of frost heaving force and stress distribution in cold region tunnels under non-axisymmetric stress and transversely isotropic frost heave of surrounding rock. *Cold Regions Science and Technology*. 2020;178:103117. https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2020.103117

8. Hashin Z. Analysis of composite materials – a survey. *Applied Mechanics*. 1983;50(3):481–505. https://doi.org/10.1115/1.3167081

9. Cheng Ming, Chen Weinong, Tusit Weerasooriya. Mechanical properties of kevlar \textcircled{R}KM2 single fiber. *Engineering Materials and Technology-transactions of The Asme*. 2005;127(2):197–203. https://doi.org/10.1115/1.1857937

10. Бодунов Н.М., Дружинин Г.В. Об одном решении осесимметричной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного материала. *Прикладная механика и техническая физика*. 2009;50(6):81–89.

Bodunov N.M., Druzhinin G.V. On one solution of an axisymmetric problem of the theory of elasticity for a transversally isotropic material. *Applied Mechanics And Technical Physics*. 2009;50(6): 81–89. (In Russ.)

11. Zou R., Xia Y., Liu S., Hu P., Hou W., Hu Q., Shan C. Isotropic and anisotropic elasticity and yielding of 3D printed material. *Composites Part B: Engineering*. 2016;99:506–513. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.06.009.

12. Бауэр С.М., Замураев Л.А., Котляр К.Е. Модель трансверсально-изотропного сферического слоя для расчета изменения внутриглазного давления при интрасклеральных инъекциях. *Российский журнал биомеханики*. 2006;10(2):43–49.

Bauer S.M., Zamuraev L.A., Kotlyar K.E. Model of a transversally isotropic spherical layer for calculating changes in intraocular pressure during intrascleral injections. *Russian Journal of Biomechanics*. 2006;10(2):43–49. (In Russ.)

13. Gurlebeck K., Habetha K., Sprossig W. *Holomorphic Functions In The Plane And N-Dimensional Space*. Basel: Birkhauser; 2008.

14. Григорьев Ю.М. Решение одной задачи для упругого шара в замкнутой форме. *Динамика сплошной среды*. 1985;71:50–54.

Grigor'ev Yu.M. Solution of a problem for an elastic sphere in a closed form. *Dynamika Spl. Sredy*. 1985;71:50–54. (In Russ.)

15. Bock S., Gurlebeck K. On a spatial generalization of the Kolosov-Muskhelishvili formulae. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2009;32(2):223–240. https://doi.org/10.1002/mma.1033.

16. Grigor'ev Yu. Three-dimensional Quaternionic Analogue of the Kolosov-Muskhelishvili Formulae. *Hypercomplex Analysis: New perspectives and applications*, Trends in Mathematics. Eds. S. Bernstein, U. Kaehler, I. Sabadini, F. Sommen. 2014; Birkhauser, Basel, 145–166. https://doi.org/10.1007/978-3-319-08771-9.

17. Grigoriev Yu. Radial integration method in quaternion function theory and its applications. *AIP Conference Proceedings*. 2015;1648:440003. https://doi.org/10.1063/1.4912654.

18. Yakovlev A., Grigor'ev Yu. Three-dimensional quaternionic Kolosov-Muskhelishvili formulae in infinite space with a cavity. *AIP Conference Proceedings*. 2020;2293:110008. https://doi.org/ 10.1063/5.0026655.

19. Grigor'ev Yu., Gurlebeck K., Legatiuk D. Quaternionic formulation of a Cauchy problem for the Lame equation. *AIP Conference Proceedings*. 2018;1978: 280007. https://doi.org/10.1063/1.5043907.

20. Остросаблин Н.И. Диагонализация трехмерной системы уравнений в смещениях линейной теории упругости трансверсально-изотропных сред. *Прикладная механика и техническая физика*. 2013;54(6): 125–145.

Ostrosablin N.I. Diagonalization of a three-dimensional system of equations in displacements of the linear theory of elasticity of transversally isotropic media. *Applied Mechanics And Technical Physics*. 2013;54(6):125–145. (In Russ.)

21. Gassmann F. Introduction to seismic travel time methods in anisotropic media. *Pure Appl. Geophys*. 1964;58(II):63–113. https://doi.org/10.1007/BF00879140.

22. Аннин Б.Д. Трансверсально-изотропная упругая модель геоматериалов. *Сиб. журн. индустр. математики*. 2009; 12(3). 5–14.

Annin B.D. A transversely isotropic elastic model of geomaterials. *Sib. J. Appl. Ind. Math*.2009;12(3):5–14. (In Russ.)

23. Батугин С.А., Ниренбург Р.К. Приближенная зависимость между упругими константами горных пород и параметры анизотропии. *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*. 1972; 1: 7–11.

Batugin SA, Nirenburg PK. Approximate relationship among the elastic constants of anisotropic rocks, and anisotropy parameters. *Fiz.-tekhn. Probl. Razrabotki Polezn. Iskopaemykh*. 1972;(1):7–11. (In Russ.)

24. Федоров Ф.И. *Теория упругих волн в кристаллах*. М.: Наука; 1965. 388 с.

Fedorov F.I. *Theory Of Elastic Waves In Crystals*. M.: Nauka; 1965. 388 p. (In Russ.)

25. Carrier G.F. The propagation of waves in orthotropic media. *Quart. Appl. Math*. 1946; 4:160–165.

26. Cameron N., Eason G. Wave Propagation in an Infinite Transversely Isotropic Elastic Solid. *Quart. J. Mech. Appl. Mech*. 1967; 20(1):23–40. https://doi.org/10.1093/qjmam/20.1.23

27. Misicu M. Representarea ecuatilor echilibrului elastic prin functii monogene de cuaterninoni. *Bull. Sti-int. Acad. RPR. Sect. st. mat.fiz*. 1957; 9(2): 457–470.

28. Григорьев Ю.М. *Решение пространственных статических задач теории упругости методами теории кватернионных функций*: Дисс. … канд. физ.-мат. наук. Новосибирск. 1985. 142 с.

Grigoriev Yu.M. *Solution of spatial static problems of the theory of elasticity by methods of the theory of quaternion functions*.: Diss. Cand.Sci., Novosibirsk. 1985. 142 p. (In Russ.)

29. Наумов В.В. *Аналитические результаты в математической теории упругости*: Дисс. … канд. физ.-мат. наук. Якутск. 1993. 111 с.

Naumov V.V. *Analytical results in the mathematical theory of elasticity*: Diss. Cand. Sci., Yakutsk. 1993. 111 p. (In Russ.)

30. Liu Li-Wei, Hong Hong-Ki. Clifford algebra valued boundary integral equations for three-dimensional elasticity. *Applied Mathematical Modelling*. 2017; 54: 246–267. https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.09.031.

Об авторах

ГРИГОРЬЕВ Юрий Михайлович, доктор физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой «Теоретическая физика»; ведущий научный сотрудник; AuthorID: 14623701400, ReseacherID: K-8270-2016, https://orcid.org/ 0000-0001-8001-9964, e-mail: grigyum@yandex.ru

ЯКОВЛЕВ Андрей Михайлович, специалист по машинному обучению; e-mail: andrewyakovlev1994@gmail.com

About the authors

GRIGOR'EV, Yuri Mikhailovich, Dr. Sci (Phys. and Math.), Associate Professor, Deputy rector for international scientific and technical activities, Head of the Theoretical Physics Department; Leading Researcher; AuthorID: 14623701400, ReseacherID: K-8270-2016, https://orcid.org/ 0000-0001-8001-9964, e-mail: grigyum@yandex.ru

YAKOVLEV, Andrey Mikhailovich, Machine Learning Specialist; e-mail: andrewyakovlev1994@gmail.com

Поступила в редакцию / Submitted 20.12.2022
Поступила после рецензирования / Revised 11.01.2023
Принята к публикации / Accepted 25.01.2023