

Обзорная статья

## Математическое моделирование для устойчивого развития Севера России

С. Г. Пятков<sup>1,3</sup>, Л. Н. Владимиров<sup>1</sup>, С. В. Попов<sup>✉,1,2</sup>,

<sup>1</sup>Академия наук Республики Саха (Якутия), г. Якутск, Российская Федерация

<sup>2</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, г. Якутск, Российская Федерация

<sup>3</sup>Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск, Российская Федерация

✉ [guspopov@mail.ru](mailto:guspopov@mail.ru)

### Аннотация

Описываются основные математические модели, используемые при решении задач, связанных с глобальным изменением климата и антропогенным воздействием на природные процессы северных территорий. На основе полученных результатов возможно создание региональных систем принятия решений для предупреждения и ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций, разработка автоматизированных сетей мониторинга потоков углерода, прогнозирование климатических изменений, в том числе определение экологического ущерба, источников загрязнения, описание процессов распространения загрязнений в атмосфере, почве или водоеме.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, климат, источники загрязнения, мерзлота

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ по теме: «Аналитическое и численное исследование обратных задач об определении параметров источников атмосферного или водного загрязнения и (или) параметров среды» (№ FENG-2023-0004), а также комплексных научных исследований в Республике Саха (Якутия) по теме: «Разработка новых подходов математического моделирования природных, техногенных и социально-экономических процессов Арктического региона и Северо-Востока России».

**Для цитирования:** Пятков С.Г., Владимиров Л.Н., Попов С.В. Математическое моделирование для устойчивого развития Севера России. *Природные ресурсы Арктики и Субарктики*. 2023;28(4):641–656. <https://doi.org/10.31242/2618-9712-2023-28-4-641-656>

Review article

## Mathematical modeling of sustainable development in North Russia

S.G. Pyatkov<sup>1,3</sup>, L.N. Vladimirov<sup>1</sup>, S.V. Popov<sup>✉,1,2</sup>

<sup>1</sup>Academy of Sciences of the Republic of Sakha (Yakutia), Yakutsk, Russian Federation

<sup>2</sup>Ammosov North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russian Federation

<sup>3</sup>Yugra University, Khanty-Mansiysk, Russian Federation

✉ [guspopov@mail.ru](mailto:guspopov@mail.ru)

### Abstract

The main mathematical models used to address issues related to global climate change and human impact on the natural systems of the northern regions are discussed. These models were employed to analyze the effects of emergency situations and develop regional decision-making systems for prevention and mitigation. Moreover, these models can be utilized to establish automated networks for monitoring carbon flows, forecasting climate change, identifying sources of pollution, and describing the processes by which pollution spreads in the atmosphere, soil, or water bodies. These efforts aim to address the environmental damage and mitigate the negative impacts of human activity on the natural world.

**Keywords:** mathematical modeling, climate, sources of pollution, permafrost

**Funding.** This study was conducted within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under the project “Analytical and numerical study of inverse problems to determine the parameters of sources of atmospheric or water pollution and (or) environmental parameters” (theme number FENG-2023-0004), and complex scientific research in the Republic of Sakha (Yakutia) “Development of new approaches to mathematical modeling of natural, man-made and socio-economic processes in the Arctic region and North-East Russia”.

**For citation:** Pyatkov S.G., Vladimirov L.N., Popov S.V. Mathematical modeling of sustainable development in North Russia. *Arctic and Subarctic Natural Resources*. 2023;28(4):641–656. (In Russ.); <https://doi.org/10.31242/2618-9712-2023-28-4-641-656>

## Введение

Проблемы глобального изменения климата и антропогенного воздействия на природные процессы вызывают большой интерес в силу их огромной практической значимости.

Один из наиболее ключевых процессов – круговорот углерода, особенно в локальных экосистемах, где значительным элементом экосистемы являются болота, а также велико антропогенное воздействие на отдельные природные компоненты. Проблема состоит в оценке эмиссии парниковых газов и оценке их влияния на глобальное изменение климата.

Вторым значимым процессом в условиях криолитозоны является изменение температурных режимов мерзлых грунтов, в том числе частичное исчезновение вечной мерзлоты, которое влияет на условия жизнедеятельности и сохранность инфраструктуры. Огромное значение имеет прогнозное описание происходящих процессов и их возможных последствий, определение путей минимизации наносимого ими ущерба.

Значимо также антропогенное воздействие на природную среду, что особенно актуально для северных территорий. Освоение новых районов криолитозоны часто проводится с нарушением почвенных покровов и техногенным загрязнением (промстоками, рассолами, нефтепродуктами, радионуклидами и другими экологически опасными загрязнителями) грунта, что приводит к уничтожению растительности и образованию термокарста, солифлюкции, оползней и других нежелательных мерзлотных явлений.

Важную роль при описании происходящих изменений играют создание и анализ математических моделей, описывающих протекающие в биосфере динамические процессы, ориентированных на:

1) аналитическое и численное исследование задач восстановления теплофизических, массообменных характеристик, граничных режимов;

2) описание процессов конвективного и диффузионного переноса газов (метан, углекислый газ) и процессов поглощения в системе почва–атмосфера с учетом региональных особенностей;

3) задачи описания и прогнозирования температурных режимов в криолитозоне, описания тепломассопереноса при техногенном загрязнении деятельного слоя почвы, влияния паводковой воды или нефтяного загрязнения на тепломассообменный режим грунта, исследование поведения многолетнемерзлых пород при эксплуатации нефтяных скважин, трубопроводов;

4) задачи определения источников загрязнения, описания процессов распространения загрязнений в атмосфере, почве или водоеме.

## Определение потоков газа в атмосферу

Исследования газообмена болотных экосистем, задач описания температурных режимов и распространения загрязнений, определения источников загрязнений, а также условий сохранности инженерных сооружений особенно актуальны в связи с изменением климата. В общем виде задача расчета динамики примеси в атмосфере математически может быть определена как решение при заданных начальных и граничных условиях дифференциального уравнения вида (см. [1–3])

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla C) = \text{div}[K\nabla C] + f, \quad K_{ij} = \delta_{ij}(K_i + D) \quad (1)$$

или

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(\vec{v}C) = \text{div}[K\nabla C] + f, \quad K_{ij} = \delta_{ij}(K_i + D). \quad (2)$$

Здесь  $C$  – концентрация газа за вычетом фонового значения;  $\vec{v}$  – среднее значение скорости ветра вдоль осей  $x, y, z$  (оси  $x$  и  $y$  расположены в горизонтальной плоскости, а ось  $z$  направлена вертикально вверх);  $D$  – коэффициент молекулярной диффузии метана (или  $\text{CO}_2$ );  $\vec{K}$  – вектор коэффициентов турбулентной диффузии [4],  $t$  – время. При решении ряда практических задач вид уравнения может быть упрощен. Для изуче-

ния эмиссий газов с поверхности почвы нестационарный член  $\frac{\partial C}{\partial t}$  существен только в отдельных случаях, в частности, в условиях очень слабого ветра и малой интенсивности турбулентного обмена. Изменения концентраций в атмосфере носят обычно квазистационарный характер, поэтому часто можно исключить член  $\frac{\partial C}{\partial t}$ , положив его равным нулю, и принять только, что коэффициенты уравнения являются известными функциями времени и пространственных переменных:  $\vec{v}(t, x, y, z)$ ,  $K_x(t, x, y, z)$ ,  $K_y(t, x, y, z)$ ,  $K_z(t, x, y, z)$ . Рассматривается некоторая область  $G$  пространства вида  $G = \Omega \times (0, H)$  (например,  $\Omega$  – прямоугольник, ограниченный прямыми  $x = 0, x = X, y = 0, y = Y$  или  $\Omega = B_R(x_0)$  ( $B_R(x_0)$  – круг радиуса  $R$  с центром в некоторой точке  $x_0$ ), плоскость  $z = 0$  соответствует подстилающей поверхности. Пусть  $S$  – часть подстилающей поверхности, занятая болотом. На  $\partial G$  задаются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} C|_{\partial\Omega \times (0, H)} &= 0, \quad C(x, y, H) = 0, \\ K_{33} \frac{\partial C}{\partial z} |_{z=0, (x, y, 0) \in S} &= -q, \\ K_{33} \frac{\partial C}{\partial z} |_{z=0, (x, y, 0) \notin S} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

и данные Коши

$$C|_{t=0} = u_0(x, y, z). \quad (4)$$

Отметим, что вид граничных условий в работах разных авторов меняется. Здесь при некоторых естественных условиях было бы естественно предположить, что на границе пространственной цилиндрической области или ее части задается не концентрация, а поток. Если коэффициенты уравнения не зависят от переменной  $z$ , то иногда задачу можно свести к двумерной, положив  $c(x, y, t) = \int_0^H C(x, y, z, t) dz$  и проинтегрировав уравнение по  $z$ . Двумерная модель имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}c) &= \operatorname{div}[K \nabla c] + f(x, y, t), \\ K_{ij} &= \delta_{ij}(K_i + D), \quad i, j = 1, 2, (x, y) \in \Omega, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\vec{v}$  – вектор скорости ветра;  $K_i$  – коэффициенты турбулентной диффузии;  $f$  – поток газа на поверхности  $z = 0$ . Часто рассматриваются и двумерные модели, которые получаются из (1), если мы считаем, что решение и коэффициенты не зависят от одной из пространственных переменных. Постановка обратной задачи в случае точечных условий переопределения состоит в следующем. Пусть концентрации газа измерены в каких-

либо точках с координатами  $(x_i, y_i, z_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). Требуется найти такое значение  $q$  и решение задачи, при которых измеренные концентрации  $\psi_i(t)$  наиболее близки полученным из решения задачи концентрациям  $C(x_i, y_i, z_i)$  или (в идеальном случае) выполнено

$$C(\vec{x}_i) = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r, \vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i). \quad (6)$$

Функцию  $q$  можно искать в виде  $q = \sum_{i=1}^r q_i(t) \Phi_i(x, y)$  или  $q = \sum_{i=1}^r q_i \Phi_i(t, x, y)$ , где  $\Phi_i$  – некоторый набор базисных функций, которые считаются заданными и удовлетворяют определенным условиям. Условие (6) может заменяться на одно из условий

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} C(\vec{x}) \varphi_i(\vec{x}) d\Gamma &= \psi_i(t), \\ \int_G C(\vec{x}) \varphi_i(\vec{x}) d\Omega &= \psi_i(t), \\ i = 1, 2, \dots, r, \vec{x} &= (x, y, z), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\Gamma$  – часть границы области  $G$ , таким образом задаются некоторые средние значения величины  $C$ . В зависимости от расположения точек замеров  $\{\vec{x}_i\}$ , задача может быть как корректна по Адамару, так и не корректна (если точки замеров внутренние) [10]. Отметим, что использование условий переопределения вида (7) упрощает задачу, превращая ее (при определенных условиях) в задачу, корректную по Адамару.

Несмотря на то что рассматриваемые процессы происходят в приземном слое атмосферы, Бородулин А.И. [4] использовал физически более содержательную математическую модель – трехмерную численно-аналитическую модель, описывающую процесс распространения примеси в термически стратифицированном пограничном слое. Эта модель основана на линеаризованном варианте полной системы уравнений динамики пограничного слоя атмосферы и позволяет учитывать нестационарность метеорологических полей (различные направления скорости ветра, суточное изменение метеорологических параметров), динамическую, термическую и орографическую неоднородности подстилающей поверхности, в частности, взаимное расположение осушенной и неосушенной частей болот. В модели отдельно выделяется квазистационарный подслой, для описания которого был применен алгоритм из работы [6], основанный на теории подобия приземного слоя атмосферы. Задание коэффициентов турбулентной диффузии осуществлялось с помощью гипотезы об их пропорциональности

соответствующим компонентам тензора вязких напряжений Рейнольдса, которая была ранее проверена в натуральных экспериментах (см. [4]).

Краткий обзор приведенных в литературе данных наблюдений потоков метана в атмосферу на болотах и озерах зоны вечной мерзлоты представлен в работе [8], где, в частности, предложена одномерная модель эмиссии метана. Уравнение имеет вид (1), где в правой части содержатся величины, характеризующие сток и генерацию метана, зависящие от температуры. Уравнение для температуры также одномерное. Другая модель представлена в работе [9]. После определения температуры и толщин мерзлых и талых слоев оцениваются вертикальные распределения биохимических компонентов. Математическая модель динамики концентраций биохимических компонентов основана на уравнении диффузии:

$$\partial_t C_m = \partial_z(D_z(z)C_{mz}) + f_m(t, z, \vec{C}, T), \quad m = 1, 2, \dots, r. \quad (8)$$

Здесь  $t$  – время;  $z$  – вертикальная координата;  $C_m$  – концентрация соответствующего компонента;  $D_z$  – коэффициент диффузии. Функции  $f_m(t, z, \vec{C}, T)$  описывают процессы биохимической трансформации субстанций  $C_i$ . Предполагается, что в мерзлой фазе отсутствует диффузия примесей и прекращается трансформация субстанций (т. е. при замерзании талого грунта биохимические компоненты депонируются),  $D_z = 0$ ,  $f_m = 0$ . При таянии мерзлого грунта биохимические процессы и диффузия примесей возобновляются. На верхней границе талого грунта ( $z = 0$ ) ставится условие

$$C_{mz} = \alpha(C_m - C_{m,atm}),$$

где  $C_{m,atm}$  – концентрация субстанции в атмосфере. На нижней границе слоя талого грунта поток субстанции полагается равным нулю. При  $t = 0$  задаются начальные условия. Особый интерес представляет моделирование генерации и эмиссии метана в зоне вечной мерзлоты. Отметим, что, как правило, многие величины, используемые в расчетах, зависят от температуры.

Опишем некоторые работы, посвященные численному решению задач об определении потоков. Большинство методов основано на сведении к задаче оптимального управления и минимизации соответствующего целевого функционала. Однако, иногда эти функционалы имеют по несколько локальных минимумов (см. пункт 3.3 в [3]). Опишем работы, где точечные данные используются как дополнительные замеры. Трехмерные

задачи определения постоянных потоков обсуждаются в [1]. Но численные результаты представлены только в одномерном случае. В [2] описывается метод определения постоянных потоков, основанный на известной идее Марчука Г.И. [11], где используются специальные решения сопряженной задачи (см. также [2–4]). Потоки, зависящие от времени, численно восстанавливаются в [3]. Теоремы существования и единственности решений в задачах восстановления потока по интегральным данным имеются в [10].

Число теоретических результатов, посвященных задачам восстановления потоков по точечным данным, очень ограничено. Можно сослаться на работу [5], где задача исследуется в некоторых модельных ситуациях.

### Определение источников загрязнения и родственные задачи

Рассматривается модель (1), что и в предыдущем пункте:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla C) - \operatorname{div}[K \nabla C] = f_0 + \sum_{i=1}^r f_i(t, x) q_i(t) = F, \\ K_{ij} = \delta_{ij}(K_i + D). \quad (9)$$

Здесь  $(t, x) \in (0, T) \times G$ ,  $G$  – область в  $\mathbb{R}^n$ . Уравнение (9) дополняется краевыми и начальными условиями

$$Bu|_S = g, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad S = (0, T) \times \Gamma, \quad (10)$$

где либо  $Bu = \frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u$ , либо  $Bu = u$  ( $N$  – конормаль к  $\Gamma$ ). Заданы также условия переопределения одного из видов в (6), (7). Определению подлежат неизвестные функции  $q_i$  в правой части уравнения. Проблемы такого вида, где выбрано одно из условий (7) в виде дополнительных условий, возникают в задачах теплопереноса, диффузии, фильтрации и др. [11]. В теории теплопереноса функция  $u$  – концентрация переносимого вещества, а правая часть характеризует объемную плотность источников (стоков) [11] и их расположение. Обратные задачи об определении источников делятся на два класса. Типичной является ситуация, когда в качестве правой части берется функция вида  $\sum_{i=1}^S \delta(x - x_i) q_i(t) + f_0$ , где  $\delta(x - x_i)$  – дельта-функция Дирака, т. е. первое слагаемое есть сумма точечных источников (загрязнения в жидкости или атмосфере) с мощностями  $q_i$  (см. библиографию и результаты в [12, 13]). Однако рассматриваются и случаи распределенных источников, в этом

случае можно считать, что правая часть параболической системы для концентраций достаточно гладкая функция, а само решение  $u$  достаточно регулярно (в пространствах Соболева или Гельдера). В последнем случае имеется большое количество теоретических результатов, полученных как для некоторых модельных уравнений, так и в достаточно общей ситуации [14, 15]. В этом случае очень часто обратная задача является корректной в классах конечной гладкости. В одномерном случае большое количество результатов имеется в книге [14].

В случае точечных источников в общей постановке задачи определению подлежат как сами мощности точечных источников  $q_i(t)$ , так и их местоположение  $x_i$  и их число  $r$ . Задача в этом случае корректной по Адамару не является. Тем не менее, таким обратным задачам посвящено огромное количество работ, в связи с большим количеством приложений [14]. Основные результаты связаны с методами численного решения подобных задач [16].

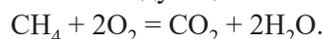
Некоторые теоретические результаты по исследованию задачи по определению точечных источников или близкой к ней имеются в работах [7, 12, 13]. В [7] рассматриваются граничные условия переопределения (данные Коши), что позволяет, используя наборы тестовых функций, полностью решить задачу определения числа источников, их местоположения и интенсивности. В [12] рассматривалась модельная задача (уравнение теплопроводности в  $\mathbb{R}^n$ ), с помощью явного представления решений прямой задачи и использованием вспомогательной вариационной задачи авторы смогли определить величины  $\sum_i N_i r_{ij}^l$  (здесь  $N_i(t) = \text{const}$  для всех  $i$  и  $r_{ij} = |x_i - y_j|$ ), что позволило решить задачу при помощи алгоритма из работы [7]. Оказалось, можно решить задачу и при помощи асимптотических представлений решений стационарных эллиптических задач (см. [17]), а также – перехода к прямой нагруженной задаче (см. [13]).

**Математическая модель конвективного переноса газа в почве.** Будем рассматривать осушенный слой болотной почвы от поверхности до некоторой глубины, ниже которой располагается насыщенный водой горизонт, где идут процессы анаэробного образования метана и  $\text{CO}_2$ . Введем следующие переменные:  $C_{\text{CH}_4}$ ,  $C_{\text{CO}_2}$  (кг  $\text{C}/\text{M}_\text{B}^3$ ),  $C_{\text{N}_2}$ ,  $C_{\text{O}_2}$  (кг  $\text{C}/\text{M}_\text{B}^3$ ) – концентрации в почвенном воздухе метана,  $\text{CO}_2$ , азота и кисло-

рода соответственно; кроме того,  $C_{\text{XB}}$  (кг  $\text{C}/\text{M}_\text{B}^3$ ) – концентрация биомассы бактерий-метанотрофов в почве. Для азота мощность источников (стоков) считаем нулевой.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi C_{\text{CH}_4}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} (D_{\text{CH}_4} (C_{\text{CH}_4})_z - U_g C_{\text{CH}_4}) - V_{0x}, \\ \frac{\partial \varphi C_{\text{CO}_2}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} (D_{\text{CO}_2} (C_{\text{CO}_2})_z - U_g C_{\text{CO}_2}) + V_{0x} + V_{\text{aer}}, \\ \frac{\partial \varphi C_{\text{N}_2}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} (D_{\text{N}_2} (C_{\text{N}_2})_z - U_g C_{\text{N}_2}), \\ \frac{\partial \varphi C_{\text{O}_2}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} (D_{\text{O}_2} (C_{\text{O}_2})_z - U_g C_{\text{O}_2}) + (V_{\text{aer}} + 2V_{0x}) \frac{M_{\text{O}_2}}{M_c}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $D_{\text{CH}_4}$ ,  $D_{\text{CO}_2}$ ,  $D_{\text{N}_2}$ ,  $D_{\text{O}_2}$  – эффективные коэффициенты диффузии метана, углекислого газа, азота и кислорода соответственно,  $M_c$  – атомная масса углерода (0,012 кг/моль),  $M_{\text{O}_2}$  – молекулярная масса кислорода (0,023 кг/моль),  $U_g$  – скорость конвективного потока газовой смеси,  $V_{\text{aer}}$  и  $V_{0x}$  – скорости аэробного окисления органического вещества почвы и метана соответственно;  $z$  (м) – глубина;  $\varphi$  ( $\text{M}_\text{B}^3/\text{M}_\text{B}^3$ ) – порозность аэрации. В последнем уравнении удвоение  $V_{0x}$  появляется вследствие того, что окисление метана предполагается следующим:



Из-за того, что, с одной стороны, температура почвы может существенно меняться даже в суточном цикле, не говоря уже о более продолжительных промежутках времени, а, с другой стороны, от температуры зависят значения  $D_{\text{CH}_4}$ ,  $D_{\text{CO}_2}$ ,  $D_{\text{N}_2}$ ,  $D_{\text{O}_2}$  и весьма существенно зависят  $V_{\text{aer}}$  и  $V_{0x}$ , необходимо учесть в модели и уравнение динамики температуры ( $T$ , K):

$$\rho c_p T_t = \partial_z (k T_z - U_g \rho_g c_g T) + a_T,$$

где  $c_p$  (кДж/(кг·K)) и  $\rho$  (кг/) – средние теплоемкость и плотность почвы;  $\rho_g$  (кг/ $\text{M}_\text{B}^3$ ) – плотность газовой смеси в почве;  $c_g$  (кДж/(кг·K)) – теплоемкость газовой смеси при постоянном давлении;  $a_T$  (кДж/( $\text{M}_\text{B}^3 \cdot \text{сут}$ )) – мощность источника, стока тепла;  $k$  (кДж/(м·сут·K)) – эффективный коэффициент теплопроводности. Если характеризующее поток газа число Рейнольдса  $\text{Re} < 1$ , то скорость этого потока может быть описана при помощи закона Дарси:

$$U_g = \frac{k T_z}{\mu},$$

где  $\mu$  (Н·сут/ $\text{M}_\text{B}^2$ ) – вязкость газа;  $P$  (Па) – давление внутри почвы;  $k$  – проницаемость, из анали-

за размерностей следует, что  $k$  нужно выражать в  $m^2$ , или, точнее говоря, для эффективной скорости конвективного потока газовой смеси, в  $m_B^3/m$ ,  $m_B^3$  – объем почвенного воздуха. По закону Дальтона, общее давление газовой смеси складывается из парциальных давлений всех составляющих ее газов, в данном случае:

$$P = P_{CO_2} + P_{CH_4} + P_{O_2} + P_{N_2},$$

где  $P_{CO_2}$ ,  $P_{CH_4}$ ,  $P_{O_2}$ ,  $P_{N_2}$  (Па) – соответственно, парциальные давления  $CO_2$ ,  $CH_4$ ,  $N_2$ , и  $O_2$ :

$$P_{CO_2} = TR \frac{C_{CO_2}}{M_c}, \quad P_{CH_4} = TR \frac{C_{CH_4}}{M_c},$$

$$P_{O_2} = TR \frac{C_{O_2}}{M_{O_2}}, \quad P_{N_2} = TR \frac{C_{N_2}}{M_{N_2}}.$$

Здесь  $R$  (8,314 Дж/(моль·К)) – универсальная газовая постоянная;  $M_{N_2}$  (0,028 кг/моль) – молекулярная масса азота. При использовании этой модели для описания процессов конвективного переноса газа обычно решаются вспомогательные обратные задачи об определении параметров среды с последующим описанием процессов конвективного и диффузионного переноса газов (метан, углекислый газ).

**Потребление метана.** Потребление метана в почве за счет окисления метанотрофными бактериями в автоморфных почвах – единственный известный биологический механизм стока для атмосферного метана. В нестационарном случае [18] уравнение записывается в виде

$$\partial_t C = \partial_z(D_z(z)C_z) - k_z C = 0, \quad C|_{z=0} = C_a, \\ C_z|_{z=Z} = 0, \quad C(z, 0) = C_0. \quad (13)$$

Здесь  $D_z$  – коэффициент диффузии  $CH_4$  в порах почвы, вычисляемый с помощью измеренных значений  $\Phi$  (общая пористость) и  $\Theta$  (объемная влажность),  $C_a$  – измеренная концентрация  $CH_4$  в атмосфере ( $mg/m^3$ ),  $k_z$  – измеренная в инкубационном эксперименте скорость потребления (т. е.  $k_z < 0$ )  $CH_4$  при  $C = C_a$ .

В стационарном случае уравнение и граничные условия на верхней  $z = 0$  и нижней  $z = Z$  границах записываются таким образом:

$$\partial_z(D_z(z)C_z) - k_z C = 0, \quad C(0) = C_a, \quad C_z|_{z=Z} = 0. \quad (14)$$

Удельный поток (УП) метана  $Q$  ( $mg/m^2/ч$ ), прогнозируемый моделью, вычислялся по полученному решению

$$Q = D_z(0,005) \frac{C_z(0,01) - C_z(0)}{0,01}.$$

Здесь также возникают обратные задачи об определении функции  $k_z(z)$  [18] по заданным значениям концентраций метана в почве.

**Моделирование углеродного цикла болотных экосистем.** Болотные экосистемы достаточно хорошо представлены в биогеохимических моделях, что в последние годы обусловлено интересом к происходящим изменениям климата, в большой мере обусловленным изменением концентрации парниковых газов в атмосфере. Известно, что в болотах законсервированы огромные запасы углерода в виде слабо-разложившегося органического вещества и они являются активным источником метана и стоком углекислого газа из атмосферы. К моделям биогеохимических циклов относятся модели углеродного цикла, включающие модели потоков углекислого газа, фотосинтеза болотной растительности, эмиссии углекислого газа и метана, трансформации органического вещества почвы, азотного и фосфорного циклов, процессов накопления микро- и макроэлементов, в том числе тяжелых металлов и радионуклидов в болотах. Динамические процесс-ориентированные модели, которые включают в себя рост растительности и динамику углерода или азота, могут быть использованы для описания углеродных функций водно-болотных угодий. Популярными моделями включают: DNDC, Papyrus Simulator [29], модели Phragmites и Typha от Asaeda и др., Peatland-VU, PEATBOG [20], Phragmites C. Малокакая литература по математическому моделированию экологических процессов также обходится без упоминания классической модели Ферхюльста.

#### Математическое моделирование техногенного загрязнения в мерзлых грунтах

Рассматриваются теплоперенос, загрязнение и тепловые режимы в криолитозоне, а также влияние паводковой воды и нефтяного загрязнения на теплообменный режим грунта и локализацию радиоактивных отходов в криолитозоне.

Совместный теплоперенос при техногенном загрязнении деятельного слоя описывается системой трех уравнений с учетом сорбции в почвенно-поглощающем комплексе (В.М. Ентов, Г.Г. Цыпкин, Р.И. Нигматулин, П.П. Пермяков, В.И. Сабинин, J.L. Nieber и др.). Общая модель имеет вид

$$c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \text{div}(\lambda(T)\nabla T) - (c_w V, \nabla T) + L \frac{\partial W_i}{\partial \tau}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial \tau} = \text{div}(k_\phi \nabla H) - \frac{\partial \theta_i}{\partial \tau}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial W_w}{\partial \tau} = \text{div}(k \nabla W_w) - \frac{\partial W_i}{\partial \tau}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial W_w C_w}{\partial \tau} = \text{div}(D \nabla C_w - V C_w) - \frac{\partial W_i C_i}{\partial \tau} - \frac{\partial N}{\partial \tau}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} = \beta \left( C - \frac{N}{k_d} \right). \quad (19)$$

Система уравнений замыкается равновесным уравнением количества незамерзшей воды и условием промерзания порового раствора:

$$W_w = W_{nw}(T, C, W), \quad W = W_w + W_i, \quad C_i = k_{zx} C_w, \quad (20)$$

где  $C$ ,  $C_w$  – объемные теплоемкости грунта и воды, Дж/(м<sup>3</sup>К);  $T$  – температура, К;  $\lambda$  – теплопроводность, Вт/(м·К);  $\tau$  – время, с;  $L$  – объемная теплота фазового перехода, Дж/м<sup>3</sup>;  $W$  – суммарная влажность, (масса всей влаги/масса скелета);  $\theta$  – объемная влажность ( $\theta = \theta_w + \theta_i$ ,  $\theta_i$ ,  $\theta_w$  – то же самое, но относящееся отдельно ко льду и воде);  $H = P - z$  – напор, м;  $P$  – всасывающее давление влаги, м;  $x$  – пространственные координаты, м;  $k$  – коэффициент диффузии, м<sup>2</sup>/с;  $k_\phi$  – коэффициент фильтрации, м/с;  $D$  – коэффициент конвективной диффузии примеси, м<sup>2</sup>/с;  $V = (V_1, V_2, V_3)$  – скорость фильтрации, м/с;  $C_w$ ,  $C_i$  – концентрации примеси в воде и льду,  $N$  – концентрация примеси в почвенно-поглощающем комплексе,  $\beta$  – коэффициент скорости обмена, 1/с;  $k_d$  – коэффициент распределения примеси. Уравнение (16) – потенциальная, (17) – влажностная формы уравнения влагопереноса. Уравнение Ричардса (16) известно как уравнение ненасыщенно-насыщенной фильтрации в дисперсных грунтах с помощью единой математической модели. Уравнения (16), (17) эквивалентны, и можно рассматривать одно из них. Уравнения теплопроводности и примеси содержат конвективные слагаемые. Конвективные члены могут быть представлены в недивергентной (неконсервативной) и дивергентной (консервативной) формах. При численном решении основное внимание уделяется вопросам аппроксимации конвективных слагаемых. Исследования влияния нефтяного загрязнения на теплофизические свойства мерзлых дисперсных пород, проведенные Р.Г. Мотенко и др. [21], указывают на понижение значений коэффициентов теплопроводности загрязненных пород как в талом, так и в мерзлом состоянии, но для мерзлых пород это влияние гораздо существеннее. Для рассмотренных мерзлых пород при значениях влаж-

ности, близких к полному влагонасыщению, это снижение может составить 18–20 %, что, по-видимому, происходит из-за привнесения в породу низко теплопроводного углеводородного компонента, теплопроводность которого значительно ниже значений теплопроводности других составляющих породы (исключая воздух). При нефтяном загрязнении не наблюдается изменение функции количества незамерзшей воды, но в зависимости от физико-химических свойств нефтепродуктов она может меняться. Подвижность загрязненного раствора определяется коэффициентом конвективной диффузии  $D(T, W_w, W_i, c)$ , который зависит от вязкости нефтепродуктов через диффузионные и фильтрационные свойства грунта.

**Упрощенные варианты. Цилиндрическая система координат [22].**

$$\begin{aligned} & c \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} r^v \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} + \\ & + c_w \left( V_z \frac{\partial T}{\partial z} + V_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - L \frac{\partial W_i}{\partial \tau} = 0, \\ & \frac{\partial \theta_w}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} k_\phi \frac{\partial (P-z)}{\partial z} - \\ & - \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} r^v k_\phi \frac{\partial (P-z)}{\partial r} + \frac{\partial \theta_i}{\partial \tau} = 0, \\ & \frac{\partial W_w}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial W_w}{\partial z} - \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} r^v K \frac{\partial W_w}{\partial r} + \\ & + \cos \bar{\theta} \frac{\partial k_\phi}{\partial z} + \sin \bar{\theta} \frac{\partial k_\phi}{\partial z} + \frac{\partial W_i}{\partial \tau} = 0, \quad (21) \\ & \frac{\partial W_i C_w}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial C_w}{\partial z} - \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} r^v D \frac{\partial W_w}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} r^v W_w V_r + \frac{\partial W_w C_w}{\partial z} + \frac{\partial W_i C_i}{\partial \tau} + \frac{\partial N}{\partial \tau} = 0, \\ & \frac{\partial N}{\partial \tau} = \beta \left( C_w - \frac{N}{k_d} \right), \quad z < h, \quad 0 < \tau < \tau_m, \end{aligned}$$

$$c = c(T) = (c_{ck} + c_i W_i + c_w W_{nw}) \rho_{sk},$$

$$W = W_w + W_i, \quad \theta = \theta_w + \theta_i,$$

$$\theta = \frac{W \rho_{sk}}{\rho_w \rho_i} (\rho_i + (\rho_w - \rho_i) i(T)), \quad (22)$$

$$C = \frac{W_w C_w + W_i C_i}{100}, \quad V_r = -k_\phi P_\tau + k_\phi \sin \bar{\theta},$$

$$V_z = -k_\phi P_z + k_\phi \cos \bar{\theta}.$$

Уравнения (21) дополняются уравнением количества незамерзшей воды и условием замерзания соли вместе с почвенной влагой:

$$W_w = W_{nw}(T, C, W), \quad W = W_w + W_i, \quad C_i = k_{zx} C_w, \quad (23)$$

При этом можно задать следующие граничные условия:

$$-k_\phi (P_z - 1)|_{z=0} = R(r, \tau), \quad k_\phi (P_z - 1)|_{z=Z} = Q(r, \tau), \quad (24)$$

$$k_{\phi}P_z = \begin{cases} 0, & T < 0, & 0 < z < Z, \\ q_{br}, & T > 0, & 0 < z < Z, \end{cases} \quad (25)$$

$$P_r = 0, \quad z \in (0, b) \cup (b_2, Z), \quad P = 0, \quad r = R, \\ z \in (b, b_1), \quad P = z - b_1, \quad r = R, \quad z \in (b_1, b_2). \quad (26)$$

Первое уравнение в (21) учитывает процесс промерзания-протаивания порового раствора с учетом фильтрации жидкой фазы. Движение самого порового раствора (воды) с учетом льдовыделения описывается вторым уравнением. Третье и пятое уравнения характеризуют процесс солепереноса в промерзающих-протаивающих грунтах. Второе уравнение называется потенциальной, а третье – влажностной формами уравнения влагопереноса (они взаимозаменяемы). На поверхности земли (верхней границе) может быть задано условие инфильтрации снеговой воды (промстока) или испарения (24), а в основании – граничное условие. На левой границе области может задаваться как напор надмерзлотных грунтовых вод, так и условие непротекания (25). На правой границе задаются аналогичные граничные условия с учетом выноса загрязненной воды и напора сезонной динамики речной воды (26). На участке выноса  $r = R, b < z < b_1$ , задаются два условия:  $P = 0$  и  $-(k_{\phi} \text{grad } H) > 0$ , второе из которых используется для определения верхней границы участка высачивания. На участке границы, где промсток  $V$  втекает внутрь области, а также на нагнетательных дренах (скважинах), задаются условия

$$(D \text{grad } S - VS)_n = -VS_v, \quad (\lambda \text{grad } T - c_w VT)_n = c_w VT, \\ \text{где } S_v, T_v - \text{концентрация и температура втекающего раствора. А на участках границы, где поток вытекает:}$$

$$(D \text{grad } S - VS)_n = 0, \quad (\lambda \text{grad } T - c_w VT)_n = 0.$$

На поверхности сезонно-охлаждающих устройств задаются  $T = \text{const}$  или  $(\lambda \text{grad } T)_n = \text{const}$ .

#### Модель А.В. Лыкова [23].

$$C \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial T}{\partial z} + c_w V \frac{\partial T}{\partial z} - L \frac{\partial W_i}{\partial \tau} = 0, \\ \frac{\partial \theta_w}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} k_{\phi} (1 - i(T)) \frac{\partial (P - z)}{\partial z} + \frac{\partial \theta_i}{\partial \tau} = 0, \\ \frac{\partial W_w}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial W_w}{\partial z} + \frac{\partial k_{\phi}}{\partial z} + \frac{\partial W_i}{\partial \tau} = 0, \quad (27) \\ \frac{\partial W_i C_w}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial C_w}{\partial z} + \frac{\partial V C_w}{\partial z} + \frac{\partial W_i C_i}{\partial \tau} + \frac{\partial N}{\partial \tau} = 0, \\ \frac{\partial N}{\partial \tau} = \beta \left( C_w - \frac{N}{k_d} \right), \quad z < h, \quad 0 < \tau < \tau_m.$$

Уравнения (27) замыкаются равновесным уравнением незамерзшей воды и условием замерзания соли вместе с почвенной влагой:

$$W_w = W_{mw}(T, C, W), \quad W = W_w + W_p, \quad C_i = k_{zx} C_w. \quad (28)$$

Физический смысл всех параметров описан в двух предыдущих пунктах.

**Прогноз динамики сезонного расшатывания газопровода, численное моделирование напряженно-деформированного состояния трубопровода при пучении грунта.** Для первой модели имеем [23]

$$c(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} r^v \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial z} \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} + \\ + c_b \left( V_r \frac{\partial T}{\partial r} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + L \frac{\partial W_{\text{л}}}{\partial \tau} = 0, \quad (29)$$

где  $r \leq R, \tau \leq \tau_m$ ,

$$\frac{\partial \theta_b}{\partial \tau} - \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} k_{\phi} r^v \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial z} k_{\phi} \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial \theta_{\text{л}}}{\partial \tau} = 0, \quad (30) \\ \frac{\partial W_b}{\partial \tau} - \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} k_{\phi} r^v \frac{\partial W_b}{\partial r} - \\ - \frac{\partial}{\partial z} k_{\phi} \frac{\partial W_b}{\partial z} + \frac{\partial k_{\phi}}{\partial z} + \frac{\partial W_{\text{л}}}{\partial \tau} = 0. \quad (31)$$

Область численного моделирования двумерная – вертикальный разрез грунта с координатами  $(r, z)$ . На поверхности грунта (на верхней границе) задаются граничные условия второго рода для температуры и условие инфильтрации атмосферных осадков или испарения:

$$-\lambda T_z|_{z=0} = q(\tau), \quad (32)$$

$$-\lambda W_z|_{z=0} = q_w(\tau). \quad (33)$$

В основании задается граничное условие непротекания, а на левой и правой границах области – поступление и вынос надмерзлотных сезонных грунтовых вод. На стенке трубопровода задается условие теплопроводности

$$-\frac{\lambda \partial T}{\partial n} = Q(\tau).$$

Теплопередача через стенки трубы при вынужденном турбулентном движении транспортируемого продукта описывается следующим образом:

$$Q(\tau) = \alpha(T_g - T),$$

где  $\alpha = \frac{Nu \lambda_{pr}}{d}$  – коэффициент теплоотдачи.

**Прогноз динамики температурного состояния мерзлого грунта [21, 22].** Температура почвы является одним из решающих факторов в таких важнейших процессах, как образование и разрушение органических веществ в круговороте элементов и соединений на нашей планете, а изучение температуры почвы следует признать важнейшей задачей физики почв. В частности,

для болот как мощнейшего природного источника метана – важного парникового газа температура была выявлена в качестве одного из главных экологических факторов, определяющих интенсивность его эмиссии [1, 24]. Задачи уменьшения неопределенностей в оценках текущей эмиссии метана и предсказания ее изменения в будущем требуют (для расчета потока  $\text{CH}_4$ , исходя из данных об окружающей среде) построения математической модели. Почва представляет собой трехфазную систему, состоящую из остова-скелета – совокупности огромного количества твердых частиц разнообразной формы и величины, разделенных промежутками, заполненными газом, влагой или тем и другим одновременно. Очевидно, что расчет температурного поля в почве, где все процессы взаимосвязаны, – задача исключительно сложная. Во многих случаях определение параметров системы осуществляется на основе метода обратной задачи.

В работе [1] обсуждается вопрос об определении теплоемкости и теплопроводности на примерах в одномерном случае, т. е. в модели

$$\rho(cT)_t = \partial_z \lambda(z, t) T_z + f, \quad (35)$$

где  $c$  – теплоемкость и  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\rho$  – плотность. В многомерном случае используется модель, аналогичная модели

$$\frac{\rho \partial c T}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla T) = \text{div}[\lambda \nabla T] + f, \quad (36)$$

где  $\vec{v}$  – скорость перемещения влаги в почве, или модель

$$\frac{\rho \partial c T}{\partial t} = \text{div}[\lambda \nabla T] + f. \quad (37)$$

Коэффициенты  $c$ ,  $\lambda$  определяются по замерам температуры методом обратной задачи. Как правило, они определяются для модельного уравнения и модельной задачи и затем используются при построении температурного поля в более сложной модели. Типы обратных задач [22, 23, 25]:

1) восстановление параметров (объемная теплоемкость, теплоемкость, коэффициент теплопроводности и др.) по точечным или интегральным данным;

2) восстановление граничного условия (как правило, на внешней поверхности грунта) по точечным или интегральным данным (в ряде моделей грунт предполагается многослойным, используются условия сопряжения задач типа дифракции или условия неидеального контакта).

В этих случаях для модели (37) определяется либо тепловой поток  $\lambda T_z|_{z=0} = q$ , либо коэффициент теплопередачи  $\alpha$ , характеризующий тепловой поток в грунт (в этом случае на поверхности задается условие  $\lambda T_z|_{z=0} = \alpha(T - T_0)$ , где  $T_0$  – температура воздуха).

Как правило, неизвестными в таких задачах являются решение  $u$ , функции, зависящие от времени или пространственных переменных, или постоянные, входящие в коэффициенты теплопроводности, теплоемкости либо в граничное условие. Дополнительные условия для нахождения этих функций часто имеют вид одного из условий в (6), (7). Стоит отметить монографию [14], где в случае  $n = 1$  определяется теплопроводность как функция времени и получены теоремы существования и единственности, а в качестве данных берутся значения решения в отдельных точках, возможно, совпадающих с граничными, в последнем случае получаем данные Коши на боковой поверхности прямоугольника. Теплопроводность, не зависящая от одной из пространственных переменных, и часть коэффициентов по данным Коши на боковой поверхности цилиндра и интегральным данным определяются в работе [26]. Получены теоремы существования и единственности решений и оценки устойчивости. В монографии Белова Ю.Я. получены теоремы существования и единственности решений, в том числе и старших коэффициентов, не зависящих от некоторых пространственных переменных с данными переопределения на сечениях пространственной области плоскостями. В силу специфики метода, все коэффициенты также не зависят от части пространственных переменных. Более полные результаты получены в цикле работ [14, 27 и др.], где показана корректность обратных задач об определении коэффициентов в случае задания решения на пространственных многообразиях или в отдельных точках, как и в нашем случае. Обратные задачи с точечными данными исследовались в работах Прилепко А.И. и его учеников.

Подавляющее большинство численных методов решения обратных задач основано на сведениях задачи в задаче оптимального управления и минимизации соответствующего целевого функционала. В литературе рассматривались очень большое количество постановок, но все же большинство работ посвящено одномерному случаю. Отметим серию работ Алифанова О.М. и его учеников, посвященных численному решению

задач об определении коэффициента теплопроводности и теплоемкости, зависящих от температуры [28].

**Идентификация параметров моделей, возникающих при описании температурного поля промерзающих-протаивающих дисперсных грунтов с учетом фазового перехода.** Одна из моделей – задача Стефана для системы параболических уравнений. Обзор численных методов решения задачи Стефана можно найти в монографии Вабищевича П.Н., математические аспекты задачи Стефана рассматриваются в монографии Мейрманова А.М.

**Задача Стефана.** Оценка эволюции термического режима грунтовых оснований инженерных сооружений в условиях меняющегося климата требует достоверности и надежности математической модели. Расчет температурного режима осуществляется с помощью детерминистских математических моделей с использованием современных численных методов и программных средств.

Классическая постановка задачи (известная задача Стефана) состоит из уравнения теплопроводности в талой  $\Omega_T$  и мерзлой зонах  $\Omega_M$  и двух граничных условий на подвижной поверхности  $\xi(\tau)$  раздела фаз [22]:

$$c_M \rho_M \frac{\partial T_M}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda_M(T_M) \nabla T_M), \quad (38)$$

$$c_T \rho_T \frac{\partial T_T}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda_T(T_T) \nabla T_T), \quad (39)$$

$$\left( \lambda_T \frac{\partial T_T}{\partial n} - \lambda_M \frac{\partial T_M}{\partial n} \right) = \rho L V_n, \quad x \in \xi(\tau), \quad (40)$$

$$T_T = T_M = T_\phi, \quad x \in \xi(\tau). \quad (41)$$

На верхней границе  $\Gamma$  исследуемой области задается граничное условие третьего рода, для которого тепловой поток в грунт определяется конвективным теплообменом между поверхностью пород и воздухом (или условие Дирихле):  $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha_{ef}(T)(T_a - T)$ , ( $x \in \Gamma$ ). На нижней границе чаще всего задается геотермический поток тепла  $q_\infty$ , т. е. условие Неймана:  $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q_\infty$ . Здесь  $T$  – температура, °С;  $\tau$  – время, с;  $x = (x_1, x_2, x_3)$  – пространственная координата;  $c$  – удельная теплоемкость, Дж/кг;  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(мК);  $\frac{\partial T}{\partial n}$ ,  $V_n$  – производная и скорость перемещения по

верхности  $\xi(\tau)$  по направлению нормали  $n$ , м/с;  $T_\phi$  – температура кристаллизации поровой влаги, °С;  $T_a$  – температура воздуха;  $\alpha_{ef}$  – коэффициент конвективного теплообмена с воздухом, Вт/(м<sup>2</sup>К); индексы:  $M$  – мерзлый;  $T$  – талый. Исходную информацию о температурном режиме воздуха за летний  $T_a^s$  и зимний  $T_a^w$  периоды аппроксимируем стандартной тригонометрической функцией

$$T_a^w = \frac{\pi \Omega_{aw}}{2\tau_w} \sin\left(\frac{\pi \tau}{\tau_w}\right), \quad T_a^s = \frac{\pi \Omega_{as}}{2\tau_s} \sin\left(\frac{\pi \tau}{\tau_s}\right),$$

где  $\Omega_{aw}$ ,  $\Omega_{as}$  – суммы отрицательных и положительных температур воздуха зимой и летом, К;  $\tau_w$ ,  $\tau_s$  – продолжительность зимнего (среднесуточная отрицательная температура воздуха) и теплого периодов года соответственно, сут.;  $\tau$  – время, сут. Аналогично аппроксимируем коэффициент конвективного теплообмена  $\alpha_{ef}$  от высоты снежного покрова.

Задачи с фазовым переходом относятся к классу нелинейных с сильноменяющимися коэффициентами и являются одними из главнейших проблем теплофизики и теоретической теплотехники. Прежде всего это связано с неопределенностью многих параметров в системе (граничных условий, теплоемкости, теплопроводности, функции количества незамерзшей воды, коэффициента диффузии и т. д.), а также несоответствиями допущений при восстановлении характеристик и построении математических моделей. Традиционный подход с использованием значений характеристик, полученных из эксперимента, часто приводит к неверным результатам. Трудности при решении коэффициентной обратной задачи тепломассообмена (ТМО) с фазовыми переходами связаны с тем, что в промерзающих-протаивающих дисперсных средах происходит сложный взаимосвязанный термодинамический процесс: идет миграция незамерзшей воды (порового раствора) в более холодную часть образца, а часть тепла расходуется на фазовый переход воды в лед (или наоборот). При этом взаимосвязанность и нелинейность уравнений усиливаются, а коэффициент диффузии (фильтрации) определяют только в талой зоне (В.Д. Ермоленко, А.В. Лыков, В.Б. Георгиевский, А.А. Алексашенко, В.В. Власов, Э.Д. Ершов и др.).

**Описание некоторых обратных задач, возникающих при описании температурного поля.** Типы обратных задач ([22, 23, 25, 26]):

1. Восстановление параметров (объемная теплоемкость, коэффициент теплопроводности и др.) или функций, входящих в математические модели, по точечным или интегральным данным.

2. Восстановление граничного условия (как правило, на внешней поверхности грунта) по точечным или интегральным данным (грунт предполагается многослойным, используются условия сопряжения задач типа дифракции).

**Определение теплофизических и массообменных характеристик.** Восстановление теплофизических и массообменных характеристик с учетом процесса промерзания-протаивания порового раствора относится к классу нелинейных задач с сильноменяющимися коэффициентами. При фазовом переходе порового раствора все теплофизические (теплоемкость, теплопроводность) и массообменные (коэффициенты диффузии, фильтрации и конвективной диффузии примеси) характеристики выражаются через функцию количества незамерзшей воды. Как известно, процесс протаивания (промерзания) влажной мерзлой (талой) дисперсной среды сопровождается переносом влаги, который приводит к существенным изменениям теплофизических характеристик. При проведении эксперимента переносом влаги можно пренебречь, если будут соблюдены следующие условия: во-первых, эксперимент проводится в цилиндрической ячейке (сосуде) достаточно малого радиуса ( $R < 0,015$  м, высота  $h \geq 6R$ ), такого что поток влаги, мигрирующий по радиусу, незначителен. Во-вторых, создается равномерный, достаточно интенсивный тепловой поток на поверхности измерительной ячейки. В этом случае влага не успевает мигрировать за время проведения эксперимента ввиду его сравнительной кратковременности. В-третьих, при проведении эксперимента должны быть соблюдены условия теоремы единственности решения обратной задачи теплопроводности. Температурное поле исследуемого образца в цилиндрическом сосуде описывается следующим уравнением теплопроводности:

$$c(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} r^v \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \tau \leq R, \quad \tau \leq \tau_m, \quad (42)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^v \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (43)$$

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = q(\tau), \quad T(0, r) = T_0(r),$$

$$c = c(T) = c_{ef} = c_{ck} + c_i W^0 + (c_w - c_i) W_{nw} + L \frac{\partial W_{nw}}{\partial T}, \quad (44)$$

$$\lambda(T) = \lambda_M + (\lambda_T - \lambda_M) \frac{W_{nw} - W_{nc}}{W^0 - W_{nc}}.$$

Здесь  $v = 0, 1$  соответствует пластине и цилиндру,  $c$  – объемная теплоемкость грунта, Дж/(м<sup>3</sup>·К);  $\lambda_M, \lambda_T$  – теплопроводности мерзлых, талых пород,  $c_{ef}, c_i, c_w$  – удельные теплоемкости грунта, льда и воды, Дж/(кг·К),  $W^0, W_{nc}$  – начальная и прочносвязанная влажности,  $W_{nw}$  – функция количества незамерзшей воды, которая в случае техногенного загрязнения грунта зависит и от засоленности  $C$ . На границе при  $r = 0$  выполняется условие ограниченности решения (43). Требуется восстановить параметры ( $c_M, c_T, \lambda_M, \lambda_T, W_{nw}(T)$ ) по известным замерам температуры  $T_i(\tau)$  в точках  $r_i (i = 1, \dots, n_T)$ , т. е.  $T(\tau, r_i) = T_i(\tau)$ .

Задача формулируется в виде задачи оптимального управления. В качестве оптимальности выбирается целевой функционал среднеквадратического отклонения замеренных температур от расчетных значений. После чего решается задача (42), (43), где добавляются необходимые граничные и начальные условия.

**Определение граничных данных** (см. [22, 25]). Рассматривается система (42) с данными (43), (44). Необходимо по заданным данным восстановить одну из функций  $\alpha(\tau)$ :

$$T(\tau, 0) = \alpha(\tau), \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^v \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha(\tau), \quad (45)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^v \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha(\tau)(T - T_c) \Big|_{r=0},$$

где  $T_c$  – температура внешней среды.

**Другая постановка граничной обратной задачи.** Рассматривается уравнение

$$c_\beta(T_\beta) \frac{\partial T_\beta}{\partial \tau} - \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} r^v \lambda_\beta(T_\beta) \frac{\partial T_\beta}{\partial r} = 0, \quad (46)$$

$$r \in (R_\beta, R_{\beta+1}), \quad \tau \leq \tau_m, \quad v = 0, 1, 2,$$

где промежуток  $r \in [R_1, R_N]$  разбит точками  $R_1 < R_2 < R_3 < \dots < R_N$ , в каждой из которых значения параметров  $c_\beta, \lambda_\beta$  свои. На границе слоев задаются условия сопряжения типа дифракции

$$T_i \Big|_{r=R_i+0} = T_{i+1} \Big|_{r=R_{i+1}-0}, \quad (47)$$

$$\lambda_i T_i \Big|_{r=R_i+0} = \lambda_{i+1} T_{i+1} \Big|_{r=R_{i+1}-0},$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Заданы условия вида

$$\lambda_1(T_\beta) \frac{\partial T_\beta}{\partial r} \Big|_{r=R_N} = q(\tau), \quad T_\beta(0, r) = T_{0\beta}(r). \quad (48)$$

Дополнительно задано условие

$$\lambda_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \alpha$$

или

$$\lambda_1(T) \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \alpha(T_1 - T_c). \quad (49)$$

Требуется по этим условиям найти функцию  $\alpha$ . Как и ранее (см. описание выше)

$$c = c(T) = c_{ef} = c_{ck} + c_i W^0 + (c_w - c_i) W_{mw} + L \frac{\partial W_{mw}}{\partial T}, \quad (50)$$

$$\lambda(T) = \lambda_M + (\lambda_T - \lambda_M) \frac{W_{mw} - W_{nc}}{W^0 = W_{nc}}.$$

**Выявление опасных участков магистральных нефтепроводов на основе долгосрочного прогнозирования ореола оттаивания многолетнемерзлых грунтов** (см. [29, 30]). Решаемые задачи: исследование напряженно-деформированного состояния подземных трубопроводов, проложенных в условиях вечной мерзлоты; расчеты температурного поля грунта вокруг магистрального нефтепровода и его напряженного состояния в многолетнемерзлых грунтах; тепловые режимы и тепловые потери подземных трубопроводов с учетом реальных условий теплообмена; исследование поведения многолетнемерзлых пород при эксплуатации нефтяных скважин.

Математическая модель представляет собой систему уравнений, описывающую температурный режим грунта, осадку оттаивающего грунта и плано-высотное положение трубопровода. Расчет температурного режима вмещающего трубопровод грунтового массива основан на решении уравнения теплопроводности Фурье и учитывает: тепловое взаимодействие трубопровода и ММГ; теплообмен на поверхности грунта; теплообмен фазовых превращений поровой влаги; граничные условия. К исходным данным относятся: параметры трубопровода; строение грунтового массива; физико-механические и теплофизические свойства грунтов; свойства насыпного грунта; параметры ММГ, климатические данные. Тепловое взаимодействие линейной части трубопровода с грунтом рассматривается в поперечных трубопроводу сечениях грунта, что справедливо в предположении плавного изменения строения и свойств грунтов вдоль трубопровода. Осадка оттаивающего грунта определяется в процессе изменения глубины оттаивания грунта под трубопроводом с учетом постепенного

перемещения источника тепла в ММГ после запуска трубопровода в эксплуатацию. При моделировании изменения плано-высотного положения и напряженного состояния трубопровод рассматривается как упругая балка бесконечной длины, находящаяся под действием комплексных нагрузок.

Одна из простейших используемых моделей для расчета плано-высотного положения трубопровода характеризуется следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} EJ_y \frac{d^4 u}{dz^4} - N(z) \frac{d^2 u}{dz^2} &= q_x(z, t), \\ EJ_x \frac{d^4 v}{dz^4} - N(z) \frac{d^2 v}{dz^2} &= q_y(z, t), \\ \frac{d^2 v}{dz^2} &= - \frac{q_z}{\pi D E \delta_T}. \end{aligned} \quad (51)$$

В этой системе уравнений приняты обозначения:  $EJ$  – изгибная жесткость трубопровода,  $u, v, w$  – смещения трубопровода в направлении осей  $x, y, z$  соответственно;  $N(z)$  – продольное усилие;  $q_x, q_y, q_z$  – проекции распределенной нагрузки на трубопровод (отпора грунта) на оси  $x, y, z$ ;  $D$  – наружный диаметр трубопровода;  $E$  – модуль упругости материала труб;  $\delta_T$  – толщина стенки труб.

### Список литературы / References

1. Glagolev M.V., Sabrekov A.F. Determination of gas exchange on the border between ecosystem and atmosphere: inverse modeling. *Mathematical Biology and Bioinformatics*. 2012;7(1):81–101.
2. Белоліпецкі В.М., Белоліпецкі П.В. Оценка потока углерода между атмосферой и наземной экосистемой по измеренным на вышке вертикальным распределениям концентраций. *Вестник НГУ. Сер.: Информационные технологии*. 2011;9(1):75–81.  
Belolipetsky V.M., Belolipetsky P.V. Estimation of carbon flux between atmosphere and terrestrial ecosystem using vertical distribution of co2 concentrations measured on tall-tower. *Vestnik NSU. Series: Information Technologies*. 2011;9(1):75–81. (In Russ.)
3. Глаголев М.В., Филлипов И.В. *Замеры потоков парниковых газов в болотных экосистемах*. Ханты-Мансийск: Югорский госуниверситет; 2014.
4. Glagolev M.V., Fillipov I.V. *Measurements of greenhouse gas fluxes in wetland ecosystems*. Khanty-Mansiysk: Ugra State University; 2014.
4. Бородулин А.И., Десятков Б.Д., Махов Г.А., Сарманов С.Р. Определение эмиссии болотного метана по измеренным значениям его концентрации в приземном слое атмосферы. *Метеорология и гидрология*. 1997;(1):66–74.

- Borodulin A.I., Desyatkov B.D., Makhov G.A., Sarmanaev S.R. Determination of the emission of swamp methane from the measured values of its concentration in the surface layer of the atmosphere. *Meteorologiya i Gidrologiya*. 1997;(1):66–74. (In Russ.)
5. Pyatkov S., Shilenkov D. Existence and uniqueness theorems in the inverse problem of recovering surface fluxes from pointwise measurements. *Mathematics*. 2022;10(9):1549.
6. Казаков А.Л., Лазриев Г.Л. О параметризации приземного слоя атмосферы и деятельного слоя почвы. *Известия Академии наук СССР. Физика атмосферы и океана*. 1978;14(3):257–265.
- Kazakov A.L., Lazriev G.L. On the parameterization of the surface layer of the atmosphere and the active layer of soil. *Izvestiya of the Academy of Sciences of the USSR. Atmospheric and Oceanic Physics*. 1978;14(3):257–265. (In Russ.)
7. Badia A.E., Ha-Duong T. On an inverse source problem for the heat equation. Application to a pollution detection problem. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2002;10(6):585–599.
8. Степаненко В.М., Мачульская Е.Е., Глаголев М.В., Лыкозов В.Н. Моделирование эмиссии метана из озёр зоны вечной мерзлоты. *Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана*. 2011;47(2):275–288.
- Stepanenko V.M., Machulskaya E.E., Glagolev M.V., Lykosov V.N. Numerical modeling of methane emission from lakes in the permafrost zone. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2011;47(2):275–288. (In Russ.)
9. Белопицкий М., Генова С.Н. Одномерная модель эмиссии метана в зонах вечной мерзлоты. *Решетнёвские чтения*. 2018;1:558–559.
- Belolipetskii M., Genova S.N. One-dimensional model of methane emission in permafrost zones. *Reshetnev Readings*. 2018;1:558–559. (In Russ.)
10. Вержбицкий М.А., Пятков С.Г. О некоторых обратных задачах определения граничных режимов. *Математические заметки СВФУ*. 2016;23(2):3–18.
- Verzhbitskii M.A., Pyatkov S.G. On some inverse problems of determining boundary modes. *Mathematical notes of NEFU*. 2016;23(2):3–16. (In Russ.)
11. Marchuk G.I. Mathematical models in environmental problems. In: *Studies in mathematics and its applications*, V. 16. Amsterdam: Elsevier Science Publishers; 1986. P. 216
12. Ling L., Takeuchi T. Point sources identification problems for heat equations. *Communications in Computational Physics*. 2009;5(5):897–913.
13. Popov S.V., Nikolaev N.N. On the problem of recovering the coefficients in a one-dimensional third order equation. *AIP Conference Proceedings*. 2017;1907:030005. <https://doi.org/10.1063/1.5012627>
14. Ivanchov M. *Inverse problems for equations of parabolic type*. Lviv: WNTL Publishers, 2003. P. 240.
15. Пятков С.Г., Ротко В.В. Обратные задачи для некоторых квазилинейных параболических систем с точечными условиями переопределения. *Математические труды*. 2019;22(1):178–204.
- Pyatkov S.G., Rothko V.V. Inverse problems for some quasilinear parabolic systems with point overdetermination conditions. *Matematicheskie Trudy*. 2019;22(1):178–204. (In Russ.) <https://doi.org/10.33048/mattrudy.2019.22.107>
16. Пененко А.В., Рахметуллина С.Ж. Алгоритмы локализации источников загрязнения атмосферного воздуха на основе данных автоматизированной системы экологического мониторинга. *Сибирские электронные математические известия*. 2013;10:35–54.
- Penenko A.V., Rachmetullina S.G. Algorithms for atmospheric emission source localization based on the automated ecological monitoring system data. *Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya [Siberian Electronic Mathematical Reports]*. 2013;10:35–54. (In Russ.)
17. Pyatkov S.G., Neustroeva L.V. On some asymptotic representations of solutions to elliptic equations and their applications. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2021;66:964–987. <https://doi.org/10.1080/17476933.2020.1801656>
18. Murguia-Flores F., Arndt S., Ganesan A., et al. Soil Methanotrophy Model (MeMo v1.0): a process-based model to quantify global uptake of atmospheric methane by soil. *Geoscientific Model Development*. 2018;11:2009–2032. <https://doi.org/10.5194/gmd-11-2009-2018>
19. Hes E.M.A., Niu R., van Dam A.A. A simulation model for nitrogen cycling in natural rooted papyrus wetlands in East Africa. *Wetland Ecology Management*. 2014;22:157–176. <https://doi.org/10.1007/s11273-014-9336-8>
20. Wu Y., Blodau C. PEATBOG: a biogeochemical model for analyzing coupled carbon and nitrogen dynamics in northern peatlands. *Geoscientific Model Development*. 2013;6:1173–1207.
21. Мотенко Р.Г., Чеверев В.Г., Журавлев И.И. Влияние нефтяного загрязнения на теплофизические свойства мерзлых дисперсных пород. В кн.: *Геофизические исследования криолитозоны*. М.: НСКЗ РАН; 2000. С. 132–138.
- Motenko R.G., Cheverev V.G., Zhuravlev I.I. The influence of oil pollution on the thermophysical properties of frozen dispersed rocks. In: *Geophysical studies of the cryolithozone*. Moscow; 2000, pp.132–138. (In Russ)
22. Пермьяков П.П. *Идентификация параметров математической модели теплогазопереноса в мерзлых грунтах*. Новосибирск: Наука; 1989.
- Permyakov P.P. *Identification of parameters of a mathematical model of heat and moisture transfer in frozen soils*. Novosibirsk: Nauka; 1989. (In Russ)
23. Пермьяков П.П., Винокурова Т.А., Попов Г.Г. Теплогазоперенос в грунтовом основании газопровода при наледи. *Вестник Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова*. 2020;76(2):32–41. <https://doi.org/10.25587/SVFU.2020.76.61507>

Permyakov P.P., Vinokurova T.A., Popov G.G. Heat and moisture transfer in the soil base of pipelines with aufeis. *Vestnik of NEFU*. 2020;76(2):32–41. (In Russ.) <https://doi.org/10.25587/SVFU.2020.76.61507>

24. Johansson A.E., Gustavsson A.-M., Oquist M.G., Svensson B.H. Methane emissions from a constructed wetland treating wastewater - seasonal and spatial distribution and dependence on edaphic factors. *Water Research*. 2004;38(18):3960–3970. <https://doi.org/10.1016/j.watres.2004.07.008>

25. Huntul M.J., Hussein M.S. Simultaneous identification of thermal conductivity and heat source in the heat equation. *Iraqi Journal of Science*. 2021;62(6):1968–1978. <https://doi.org/10.24996/ijis.2021.62.6.22>

26. Iskenderov A.D., Akhundov A.Ya. Inverse problem for a linear system of parabolic equations. *Doklady Mathematics*. 2009;79(1):73–75. <https://doi.org/10.1134/S1064562409010219>

27. Pyatkov S.G.E. On some classes of inverse problems for parabolic equations. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2011;18(8):917–934. <https://doi.org/10.1515/JIP.2011.011>

28. Alifanov O.M., Budnik S.A., Nenarokomov A.V., et al. Parametric identification of a mathematical model of heat transfer in carbon-carbon (C-C) materials for aeronautical application. *Russian Aeronautics*. 2016;59(4):548–553. <https://doi.org/10.3103/S1068799816040176>

29. Земенков Ю.Д., Дудин С.М., Налобин Н.В. Разработка алгоритма построения температурного поля мерзлого грунта вокруг трубопроводов. *Территория «Нефтегаз»*. 2015;(9):112–117.

Zemenkov Yu.D., Dudin S.M., Nalobin N.V. Algorithm design of frozen ground thermal field definition round pipelines. *Territorija Neftegaz – Oil and gas territory*. 2015;(9):112–117. (In Russ)

30. Базаров А.А., Данилушкин А.И. Моделирование процессов теплообмена между газопроводом и окружающей средой. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки*. 2015;46(2):66–75.

Vazarov A.A., Danilushkin A.I. Modeling of processes of heat exchange between a gas pipeline and an environment. *Vestn. Samar. Vestnik of Samara State Technical University (Technical Sciences Series)*. 2015;46(2):66–75. (In Russ.)

#### Об авторах

ПЯТКОВ Сергей Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор, <https://orcid.org/0000-0002-7238-9559>, ResearcherID: H-4458-2013, Scopus Author ID: 6507419969, РИНЦ AuthorID: 8413, e-mail: [pyatkov@math.nsc.ru](mailto:pyatkov@math.nsc.ru)

ВЛАДИМИРОВ Леонид Николаевич, член-корреспондент РАН, академик АН РС(Я), доктор биологических наук, профессор, <https://orcid.org/0000-0001-6026-3679>, Scopus Author ID: 57004575000, РИНЦ AuthorID: 289067, e-mail: [vladimirovln@mail.ru](mailto:vladimirovln@mail.ru)

ПОПОВ Сергей Вячеславович, академик АН РС(Я), доктор физико-математических наук, профессор, <https://orcid.org/0000-0002-6851-7765>, ResearcherID: A-6567-2017, Scopus Author ID: 57193984618, РИНЦ AuthorID: 113155, e-mail: [guspopov@mail.ru](mailto:guspopov@mail.ru)

#### About the authors

PYATKOV, Sergey Grigorievich, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor, <https://orcid.org/0000-0002-7238-9559>, ResearcherID: H-4458-2013, Scopus Author ID: 6507419969, RISC AuthorID: 8413, e-mail: [pyatkov@math.nsc.ru](mailto:pyatkov@math.nsc.ru)

VLADIMIROV, Leonid Nikolaevich, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Academy of Sciences of the Republic of Sakha (Yakutia), Dr. Sci. (Biol.), Professor, <https://orcid.org/0000-0001-6026-3679>, Scopus Author ID: 57004575000, RISC AuthorID: 289067, e-mail: [vladimirovln@mail.ru](mailto:vladimirovln@mail.ru)

POPOV, Sergey Vyacheslavovich, Academician of the Academy of Sciences of the Republic of Sakha (Yakutia), Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor, <https://orcid.org/0000-0002-6851-7765>, ResearcherID: A-6567-2017, Scopus Author ID: 57193984618; RISC AuthorID: 113155, e-mail: [guspopov@mail.ru](mailto:guspopov@mail.ru)

Поступила в редакцию / Submitted 10.10.2023

Поступила после рецензирования / Revised 02.11.2023

Принята к публикации / Accepted 16.11.2023